

Avanti

10M08 – त्रिकोणमिति का परिचय

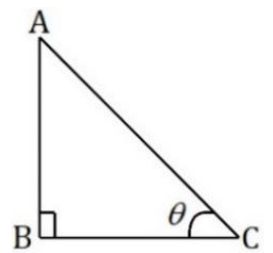
TABLE OF CONTENTS

10M08 – त्रिकोणमिति का परिचय.....	150
10M08.0 Revision Notes.....	150
10M08.1 त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios).....	151
10M08.2 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Some Specific Angles)	154
10M08.3 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Complementary Angles).....	155
10M08.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Identities).....	155
खेल खेल में	160
Recall Test	161
Concept Test.....	161
HBSE Practice Questions	163

10M08.0 Revision Notes

कक्षा - 7 में आपने पढ़ा

- A. **न्यूनकोण (Acute Angle):-** वह कोण, जिसका मान 90° से कम हो, न्यून कोण कहलाता है।
- B. **समकोण (Right Angle):-** वह कोण, जिसका मान 90° हो, समकोण कहलाता है।
- C. **समकोण त्रिभुज (Right Angled Triangle):-** वह त्रिभुज, जिसका एक कोण समकोण अर्थात् 90° हो, समकोण त्रिभुज कहलाता है।
आकृति में समकोण त्रिभुज ABC है, जिसका $\angle B$ समकोण है तथा $\angle A$ व $\angle C$ न्यून कोण है।

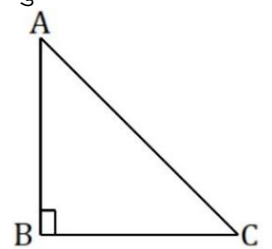


समकोण त्रिभुज में, समकोण के सामने वाली भुजा **कर्ण**, न्यूनकोण θ के सामने वाली भुजा **लम्ब** तथा तीसरी भुजा **आधार** कहलाती है।

- D. **पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem):-** समकोण त्रिभुज, पाइथागोरस प्रमेय का पालन करते हैं। पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार— समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

आकृति में दिए गए समकोण त्रिभुज ABC में, कर्ण AC का वर्ग, अन्य दो भुजाओं AB व BC के वर्गों के योग के बराबर होता है अर्थात् $AC^2 = AB^2 + BC^2$

इसका विलोम भी सत्य है अर्थात् यदि कोई त्रिभुज पाइथागोरस प्रमेय का पालन करता है, तो वह समकोण त्रिभुज है।



Exercise 10M08.0

- निम्न में से कौन-सा न्यून कोण है—
A. 95° B. 90° C. 150° D. 45°
- पाइथागोरस प्रमेय का पालन करते हैं—
A. अधिक कोण त्रिभुज B. समकोण त्रिभुज
C. न्यूनकोण त्रिभुज D. इनमें से कोई नहीं
- समकोण त्रिभुज ABC में, कोण B पर समकोण है। यदि $AB = 6\text{ cm}$ तथा $BC = 8\text{ cm}$ है, तो AC का मान ज्ञात कीजिए।
- 18 m ऊंचे एक उर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे के निचले सिरे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार की लंबाई 24 m हो।
- किसी त्रिभुज ABC में, $AB = 3$ सेमी, $AC = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी हो, तो $\angle A$ का मान ज्ञात कीजिए।
- एक समकोण त्रिभुज का लम्ब, उसके आधार से 2 cm अधिक है। यदि समकोण त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई 10 cm हो, तो अन्य विमाएँ ज्ञात कीजिए।
- एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए, यदि इसकी समान भुजा की लम्बाई 10 cm है।

10M08.1 त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

A. त्रिकोणमिति (Trigonometry):-

त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है। त्रिकोणमिति का अनुप्रयोग खगोलशास्त्र, भूगोल, सर्वे आदि में होता है।

B. त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios):-

एक समकोण त्रिभुज के एक न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात, त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लंबाई के बीच के संबंध को व्यक्त करते हैं। समकोण त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित इन अनुपातों को, त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

समकोण त्रिभुज ABC (देखिए आकृति) में न्यूनकोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं—
समकोण त्रिभुज ABC में न्यूनकोण A के लिए उसकी सम्मुख भुजा BC , लम्ब तथा उसकी संलग्न भुजा AB , आधार है।

$$\angle A \text{ का sine} = \sin A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा (लम्ब)}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ का cosine} = \cos A = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा (आधार)}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ का tangent} = \tan A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा (लम्ब)}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा (आधार)}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cosecant} = \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\angle A \text{ का sine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा (लम्ब)}} = \frac{AC}{BC}$$

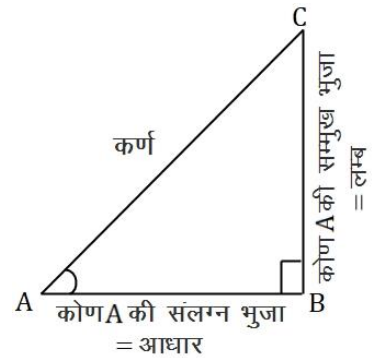
$$\angle A \text{ का secant} = \sec A = \frac{1}{\angle A \text{ का cosine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा (आधार)}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cotangent} = \cot A = \frac{1}{\angle A \text{ का tangent}} = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा (आधार)}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा (लम्ब)}} = \frac{AB}{BC}$$

अनुपात $\operatorname{cosec} A, \sec A$ और $\cot A$ क्रमशः अनुपातों $\sin A, \cos A$ और $\tan A$ के व्युत्क्रम होते हैं।

इसी प्रकार, समकोण त्रिभुज ABC (देखिए आकृति) में न्यूनकोण C के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं—

समकोण त्रिभुज ABC में न्यूनकोण C के लिए उसकी सम्मुख भुजा AB लम्ब तथा उसकी संलग्न भुजा BC आधार है।



$$\angle C \text{ का sine} = \sin C = \frac{\text{कोण } C \text{ की सम्मुख भुजा (लम्ब)}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

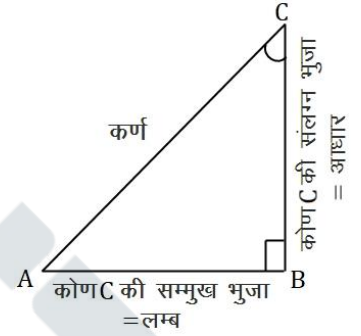
$$\angle C \text{ का cosine} = \cos C = \frac{\text{कोण } C \text{ की संलग्न भुजा (आधार)}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle C \text{ का tangent} = \tan C = \frac{\text{कोण } C \text{ की सम्मुख भुजा (लम्ब)}}{\text{कोण } C \text{ की संलग्न भुजा (आधार)}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\angle C \text{ का cosecant} = \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\angle C \text{ का sine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } C \text{ की सम्मुख भुजा (लम्ब)}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle C \text{ का secant} = \sec C = \frac{1}{\angle C \text{ का cosine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } C \text{ की संलग्न भुजा (आधार)}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle C \text{ का cotangent} = \cot C = \frac{1}{\angle C \text{ का tangent}} = \frac{\text{कोण } C \text{ की संलग्न भुजा (आधार)}}{\text{कोण } C \text{ की सम्मुख भुजा (लम्ब)}} = \frac{BC}{AB}$$

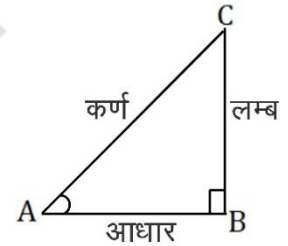


C. त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध (Relation Between Trigonometric Ratios)

त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंध त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने तथा विभिन्न त्रिकोणमितीय मान ज्ञात करने के लिए उपयोगी है।

हम पढ़ चुके हैं कि किसी समकोण त्रिभुज ABC के न्यून कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों में निम्न संबंध होते हैं—

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$	$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$	$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$
$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$	$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$	$\cos A = \frac{1}{\sec A}$
$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$	$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$	$\tan A = \frac{1}{\cot A}$
$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{लम्ब/कर्ण}}{\text{आधार/कर्ण}} = \frac{\sin A}{\cos A}$	$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{आधार/कर्ण}}{\text{लम्ब/कर्ण}} = \frac{\cos A}{\sin A}$	



- Note:-**
- I. $\sin A$, \sin और A का गुणनफल नहीं है। A से अलग रहकर 'sin' का कोई अर्थ ही नहीं होता।
 - II. यदि कोण समान बना रहे, तो कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों में त्रिभुज की भुजाओं की लंबाईयों के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता।
 - III. $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ आदि के स्थान पर क्रमशः $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ आदि लिख सकते हैं।
 - IV. समकोण त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होती है, इसलिए $\sin A$ या $\cos A$ का मान सदा ही 1 से कम हाता है (या विशेष स्थिति में 1 के बराबर होता है)।
 - V. विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्न Short Trick से याद रख सकते हैं—

$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
L	A	L
K	K	A
$\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\cot A$

जहाँ L, K और A क्रमशः समकोण त्रिभुज के लम्ब, कर्ण और आधार है।

उदाहरण:- यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

[NCERT Ex-8.1 Q3]

हल:- दिया है $\sin A = \frac{3}{4}$

माना $\sin A = \frac{3k}{4k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से—

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

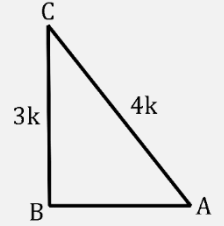
$$= (4k)^2 - (3k)^2$$

$$= 16k^2 - 9k^2$$

$$= 7k^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}k$$

$$\text{इसलिए, } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ और } \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$



उदाहरण:- एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $2 \sin A \cos A = 1$ [NCERT Example 4]

हल:- ΔABC में-

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$$

(\because यहाँ $\angle A$ के लिए उसकी सम्मुख भुजा BC लम्ब तथा उसकी संलग्न भुजा AB आधार होगी)

$$\Rightarrow BC = AB$$

माना $AB = BC = k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय से-

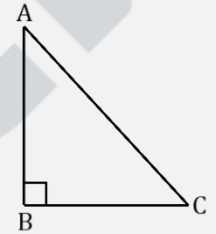
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(k)^2 + (k)^2} \\ = k\sqrt{2}$$

$$\text{अतः } \sin A = \frac{AB}{AC} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{तथा } \cos A = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{अतः } 2 \sin A \cos A = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1$$



उदाहरण:- ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25 \text{ cm}$ और $PQ = 5 \text{ cm}$ है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए। [NCERT Ex-8.1 Q10]

हल:- दिया है ΔPQR में, कोण Q समकोण है।

$$\text{माना } QR = x$$

$$\text{इसलिए, } PR = 25 - x$$

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से-

$$PR^2 = PQ^2 + RQ^2$$

$$\Rightarrow (25 - x)^2 = (5)^2 + (x)^2$$

$$\Rightarrow 625 + x^2 - 50x = 25 + x^2$$

$$\Rightarrow 625 - 50x = 25$$

$$\Rightarrow 50x = 600$$

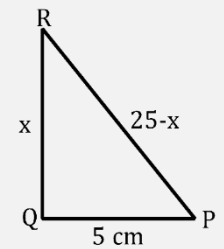
$$\Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow QR = 12 \text{ cm, } PR = 25 - 12 = 13 \text{ cm}$$

$$\text{इसलिए, } \sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{QP}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{RQ}{PQ} = \frac{12}{5}$$



10M08.2 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Some Specific Angles)

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
$\cot A$	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
$\operatorname{cosec} A$	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण:- $\triangle PQR$, जिसका कोण Q समकोण है (देखिए आकृति), में $PQ = 3 \text{ cm}$ और $PR = 6 \text{ cm}$ है। $\angle QPR$ और $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए। [NCERT Example 7]

हल:- दिया हुआ है कि $PQ = 3 \text{ cm}$ और $PR = 6 \text{ cm}$

$$\therefore \sin R = \frac{PQ}{PR}$$

$$\therefore \sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\text{अतः } \angle PRQ = 30^\circ$$

\therefore त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

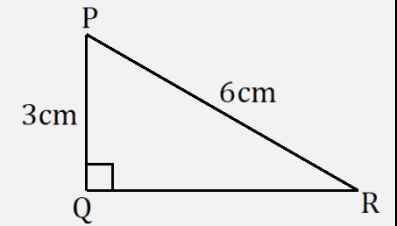
$$\therefore \angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle P + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle P = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle P = 60^\circ$$

$$\text{इसलिए } \angle QPR = 60^\circ$$



उदाहरण:- यदि $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए। [NCERT Example 8]

$$\text{हल:- } \therefore \sin(A - B) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(A - B) = \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow A - B = 30^\circ \quad \dots(i)$$

$$\therefore \cos(A + B) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(A + B) = \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow A + B = 60^\circ \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर—

$$(A - B) + (A + B) = 30^\circ + 60^\circ$$

$$\Rightarrow 2A = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= 45^\circ \\ \text{समीकरण (ii) से—} \\ 45^\circ + B &= 60^\circ \\ \Rightarrow B &= 15^\circ \end{aligned}$$

10M08.3 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

दो कोणों को पूरक कोण कहा जाता है, जब उनका योग 90° के बराबर होता है।

$$\begin{array}{l|l} \sin(90^\circ - A) = \cos A & \cos(90^\circ - A) = \sin A \\ \tan(90^\circ - A) = \cot A & \cot(90^\circ - A) = \tan A \\ \sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A \end{array}$$

जहाँ कोण A के सभी मान 0° और 90° के बीच स्थित हैं।

उदाहरण:- $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए। [NCERT Example 9]

हल:- हम जानते हैं कि $\cot A = \tan(90^\circ - A)$.

$$\begin{aligned} \therefore \cot 25^\circ &= \tan(90^\circ - 25^\circ) \\ &= \tan 65^\circ \end{aligned}$$

$$\text{अतः } \frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ} = \frac{\tan 65^\circ}{\tan 65^\circ} = 1$$

उदाहरण:- यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए। [NCERT Ex-8.3 Q5]

हल:- दिया है $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ) \quad [\text{क्योंकि } \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta]$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = 5A$$

$$\Rightarrow 5A = 110^\circ$$

$$\Rightarrow A = 22^\circ$$

$$\text{इसलिए, } A = 22^\circ$$

10M08.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Identities)

एक समीकरण, संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो, तो वह सर्वसमिका कहलाती है।

एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को, त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है; जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

- I. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, जहाँ $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$
- II. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, जहाँ $0^\circ \leq A < 90^\circ$
- III. $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$, जहाँ $0^\circ < A \leq 90^\circ$

इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं अर्थात् यदि कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण:- अनुपातों $\cos A$, $\tan A$ और $\sec A$ को $\sin A$ के पदों में व्यक्त कीजिए। [NCERT Example 12]

हल:- $\because \cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$$\therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\Rightarrow \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\text{तथा } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$\text{और } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

उदाहरण:- सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

[NCERT Ex-8.4 Q5(vi)]

हल:- बाँया पक्ष = $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}} \quad [\text{क्योंकि } 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

= दाँया पक्ष

उदाहरण:- सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

[NCERT Example 14]

हल:- बाँया पक्ष = $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}$

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$= \frac{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

= दाँया पक्ष

उदाहरण:- सर्वसमिका $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि—

[NCERT Example 15]

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

हल:- बाँया पक्ष = $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1}$

क्योंकि $\sec \theta$ और $\tan \theta$ से संबंधित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए सर्वसमिका के वाम पक्ष के अंश और हर को $\cos \theta$ से भाग देने पर—

$$\frac{\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta}$$

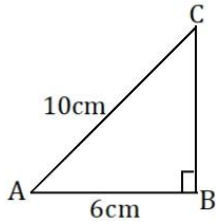
अंश और हर को $(\tan \theta - \sec \theta)$ से गुणा करने पर—

$$= \frac{\{(\tan \theta + \sec \theta) - 1\}(\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\}(\tan \theta - \sec \theta)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) - (\tan \theta - \sec \theta)}{\{\tan \theta - \sec \theta + 1\}(\tan \theta - \sec \theta)} \\
&= \frac{-1 - \tan \theta + \sec \theta}{(\tan \theta - \sec \theta + 1)(\tan \theta - \sec \theta)} \quad (\because 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta) \\
&= \frac{-(\tan \theta - \sec \theta + 1)}{(\tan \theta - \sec \theta + 1)(\tan \theta - \sec \theta)} \\
&= -\frac{1}{\tan \theta - \sec \theta} \\
&= \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \\
&= \text{दाँया पक्ष}
\end{aligned}$$

Exercise 10M08.1

- यदि $\sin A = \frac{4}{5}$ हो, तो $\cos A, \cot A$ का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $2 \sin A = 1$ हो, तो $\operatorname{cosec} A - \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $\cos \theta = \frac{12}{13}$ हो, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।
- आकृति में $\sin a - \cos a$ का मान ज्ञात कीजिए।



- यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दर्शाइए कि $\angle A = \angle B$. [NCERT Ex-8.1 Q6]
- यदि $\cot A = \sqrt{3}$ हो, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए—
 - $\sin^2 A + \cos^2 A$
 - $\sec^2 A - \tan^2 A$
- समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\sin A = \frac{6}{10}$ हो, तो $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ का मान ज्ञात कीजिए।
- ΔABC , जिसका कोण B समकोण है, में $BC = 5 \text{ cm}$ और $AC - AB = 1 \text{ cm}$ हो, तो $\sin A, \sin C$ और $\cos C$ का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि $\cot \theta = \frac{7}{8}$ हो, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए— [NCERT Ex-8.1 Q7]
 - $\frac{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$
 - $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta$
- बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। [NCERT Ex-8.1 Q11(i), (ii), (iii)]
 - $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।
 - कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$
 - $\cos A$ कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

Remaining NCERT Questions

NCERT Example : 2, 3

NCERT EX. 8.1: Q1, 2, 4, 5, 8, 9, 11 (iv), (v)

Exercise 10M08.2

1. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$ का मान बराबर है— [NCERT Ex-8.2 Q2(i)]
 A. $\sin 60^\circ$ B. $\cos 60^\circ$ C. $\tan 60^\circ$ D. $\sin 30^\circ$
2. $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$ का मान बराबर है— [NCERT Ex-8.2 Q2(ii)]
 A. 1 B. 0
 C. अपरिभाषित D. इनमें से कोई नहीं
3. $\sin 2A = 2 \sin A$ सत्य होता है, जबकि A बराबर है— [NCERT Ex-8.2 Q2(iii)]
 A. 0° B. 30° C. 60° D. 90°
4. निम्न में से कौन-सा सत्य है— [NCERT Ex-8.2 Q4]
 A. $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$
 B. θ में वृद्धि के साथ-साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
 C. θ में वृद्धि के साथ-साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
 D. θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$
5. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$ का मान बराबर है— [NCERT Ex-8.2 Q1(i)]
 A. $\sin 0^\circ$ B. $\cos 0^\circ$ C. $\cos 90^\circ$ D. $\sin 45^\circ$
6. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—
 I. $\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ$
 II. $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$
 III. $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$
7. यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए। [NCERT Ex-8.2 Q3]
8. यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ हो, तो $\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 1 \text{ cm}$ और $AC = 2 \text{ cm}$ है, तो ΔABC के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

Remaining NCERT Questions

NCERT Example :6

NCERT Ex- 8.2: Q1 (ii), (iii), (iv), (v) Q2(iv)

Exercise 10M08.3

1. $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ का मान है— [NCERT Ex-8.3 Q1(i)]
 A. 0 B. 1
 C. अपरिभाषित D. इनमें से कोई नहीं

2. $\cos 62^\circ - \sin 28^\circ$ का मान है—
 A. 0
 B. 1
 C. अपरिभाषित
 D. इनमें से कोई नहीं
3. $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$ का मान है—
 A. 0
 B. 1
 C. अपरिभाषित
 D. इनमें से कोई नहीं
4. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ हो, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए। [NCERT Ex-8.3 Q3]
5. यदि $\tan A = \cot B$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$ [NCERT Ex-8.3 Q4]
6. यदि $\sin 4A = \cos(A - 20^\circ)$ हो, जहाँ $4A$ एक न्यून कोण है, तो $4A$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए। [NCERT Ex-8.3 Q7]
8. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हों, तो दिखाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ [NCERT Ex-8.3 Q6]
9. यदि $\sec 3A = \operatorname{cosec}(A - 10^\circ)$ हो, जहाँ $3A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।
10. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।
 I. $\cos^2 48^\circ - \sin^2 42^\circ$
 II. $\tan 9^\circ - \cot 81^\circ$
 III. $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$
 IV. $\sin 35^\circ \sec 55^\circ \sin 50^\circ \sec 40^\circ$

Remaining NCERT Questions

NCERT Example :11

NCERT Ex- 8.3 : Q1 (ii), (iii), (iv) Q2

Exercise 10M08.4

1. $9 \cos^2 A + 9 \sin^2 A$ का मान है—
 A. 1
 B. 9
 C. $\frac{1}{9}$
 D. 0
2. $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है— [NCERT Ex-8.4 Q4(iv)]
 A. $\sec^2 A$
 B. -1
 C. 1
 D. $\tan^2 A$
3. $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$ बराबर है—
 A. 0
 B. 1
 C. अपरिभाषित
 D. इनमें से कोई नहीं
4. $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ बराबर है— [NCERT Ex-8.4 Q3(i)]
 A. 0
 B. 1
 C. $\tan^2 63^\circ$
 D. $\tan^2 27^\circ$
5. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A, \sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए। [NCERT Ex-8.4 Q1]
6. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।
7. सर्वसमिका $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}$ को सिद्ध कीजिए। [NCERT Ex-8.4 Q5(i)]

8. सर्वसमिका $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2 \sec A$ को सिद्ध कीजिए।

9. सर्वसमिका $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ को सिद्ध कीजिए।

10. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है।

i. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

[NCERT Ex-8.4 Q5(ix)]

ii. $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

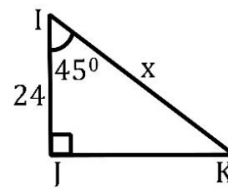
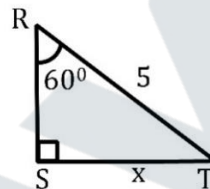
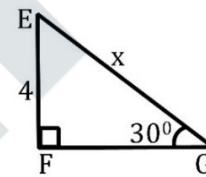
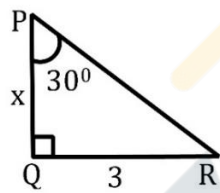
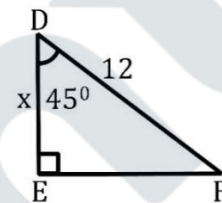
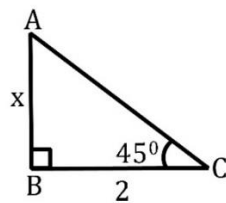
[NCERT Ex-8.4 Q5(viii)]

Remaining NCERT Questions

NCERT Ex- 8.1: Q2, Q3 (ii), Q4(i), (ii), (iii) Q5 (ii), (iii), (iv), (v) (vii), (x)

खेल खेल में

1. क्रियाकलाप:- नीचे दिए गए त्रिभुजों में x का मान ज्ञात कीजिए तथा प्रयोग किए गए त्रिकोणमिति अनुपात का नाम भी बताइए।



2. क्रियाकलाप:- नीचे दिए गए ग्रिड को पूरा करें—
उदाहरण के लिए:- $\cos 0^\circ = 1$

	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	$\cos 0^\circ \rightarrow 1$	$\left[\right]$	$\left[\right] \leftarrow \cos 30^\circ$	$\left[\right] \leftarrow \tan 60^\circ$
	$\operatorname{cosec} 30^\circ$	$\left[\right]$	$\left[\right] \leftarrow \sin 60^\circ$	$\left[\right] \leftarrow \sec 60^\circ$
	$\left[\right]$	$\tan 45^\circ$	$\left[\right]$	$\left[\right]$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ \rightarrow \left[\right]$	$\cot 0^\circ \rightarrow \left[\right]$	$\left[\right] \leftarrow \cos 60^\circ$	$\left[\right] \leftarrow 1$
$\left[\right]$	$\left[\right]$	$\left[\right]$	$\left[\right] \leftarrow \sin 0^\circ$	$\left[\right] \leftarrow \sin 45^\circ$
	$\operatorname{cosec} 45^\circ$	$\sec 60^\circ$	$\left[\right]$	$\left[\right]$
0	$\tan 0^\circ \rightarrow \left[\right]$	$\left[\right] \leftarrow \sin 90^\circ$	$\left[\right] \leftarrow \cot 30^\circ$	$\left[\right] \leftarrow 1$
	$\left[\right]$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left[\right]$
	0			$\sin 90^\circ$

Recall Test

- यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ हो, तो $\sec A$ का मान है—
If $\sin A = \frac{3}{4}$. Then value of $\sec A$ is
A. $\frac{3}{\sqrt{7}}$ B. $\frac{4}{\sqrt{7}}$ C. $\frac{5}{\sqrt{7}}$ D. $\frac{4}{3}$
- $(1 + \cot^2 \theta) \sin^2 \theta$ का मान है—
The value of $(1 + \cot^2 \theta) \sin^2 \theta$ is
A. 0 B. 2 C. 1 D. 3
- यदि $\sec A = \operatorname{cosec} B$, तो $A + B =$ _____
If $\sec A = \operatorname{cosec} B$, then $A + B =$ _____
A. 30° B. 45° C. 90° D. 60°
- एक समकोण त्रिभुज में यदि $\tan \theta = \frac{3}{4}$, हो, तो त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा का माप 5 मात्रक होगा।
A. सही B. गलत
C. निर्धारित नहीं कर सकते D. इनमें से कोई नहीं
In a right angled triangle, If $\tan \theta = \frac{3}{4}$, the greatest side of triangle is 5 units.
A. True B. False
C. Cannot be determined D. None of these
- $1 + \cot^2 \theta =$ _____
A. $\tan^2 \theta$ B. $\sec^2 \theta$
C. $\operatorname{cosec}^2 \theta$ D. $\sec \theta$

Concept Test

- $\sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ$ का मान है—
The value of $\sin 80^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \sin 10^\circ$ is
A. 1 B. 0
C. -1 D. 2
- यदि $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ है, तो $\theta =$ _____
If $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ then $\theta =$ _____
A. 30° B. 60° C. 90° D. 45°
- $\tan 48^\circ \tan 13^\circ \tan 42^\circ \tan 77^\circ$ का मान है—
The value of $\tan 48^\circ \tan 13^\circ \tan 42^\circ \tan 77^\circ$ is _____
A. 0 B. -1 C. 1 D. 2
- $\sin^2 60^\circ + 2 \tan 45^\circ - \cos^2 30^\circ$ का मान है—
The value of $\sin^2 60^\circ + 2 \tan 45^\circ - \cos^2 30^\circ$ is
A. 2 B. 1 C. 0 D. -1
- $\cos^2 67^\circ - \sin^2 23^\circ$ का मान है—
The value of $\cos^2 67^\circ - \sin^2 23^\circ$ is _____
A. 0 B. 1 C. 2 D. -1
- यदि $4 \tan \theta = 3$ हो, तो $\cos \theta$ का मान है—
If $4 \tan \theta = 3$, then $\cos \theta$ is _____
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

9. निम्न समीकरण से θ का मान ज्ञात कीजिए—

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta} = 3$$

Solve the given equation for θ :

$$\frac{\cos^2 \theta}{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta} = 3$$

उत्तर.

10. $\cos A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

Express $\cos A$ in terms of $\cot A$.

उत्तर.

11. यदि A, B और C किसी त्रिभुज के अन्तः कोण हैं, तो दर्शाइए कि $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

If A, B and C are the interior angles of a triangle, show that $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

उत्तर.

लघुत्तरात्मक प्रश्न (Short Answer Type Questions)

(4 Marks Each)

12. सूत्र $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ का उपयोग करते हुये $\cos 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए—

- यदि $A = 60^\circ$ और $B = 45^\circ$
- यदि $A = 45^\circ$ और $B = 30^\circ$

Using formula $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$, find the value of $\cos 15^\circ$

- if $A = 60^\circ$ and $B = 45^\circ$
- if $A = 45^\circ$ and $B = 30^\circ$

उत्तर. _____

13. यदि $\operatorname{cosec} A + \cot A = m$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{m^2-1}{m^2+1} = \cos A$ है।

If $\operatorname{cosec} A + \cot A = m$, then show that $\frac{m^2-1}{m^2+1} = \cos A$.

उत्तर. _____

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay Type Questions)

(5 Marks Each)

14. यदि $\sec A = x + \frac{1}{4x}$ है, तब सिद्ध कीजिये कि $\sec A + \tan A = 2x$ या $\frac{1}{2x}$

If $\sec A = x + \frac{1}{4x}$, then prove that $\sec A + \tan A = 2x$ or $\frac{1}{2x}$.

उत्तर. _____

15. सिद्ध किजिए—

[NCERT Ex-8.4 Q5(vi)]

$$i. \frac{\tan^3 \theta}{1+\tan^2 \theta} + \frac{\cot^3 \theta}{1+\cot^2 \theta} = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$ii. \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

Prove that

$$i. \frac{\tan^3 \theta}{1+\tan^2 \theta} + \frac{\cot^3 \theta}{1+\cot^2 \theta} = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$ii. \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$$

उत्तर.

Answer Key

Exercise 10M08.0

- | | | |
|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| 1. D | 2. B | 3. 10 cm |
| 4. $\sqrt{252} m = 15.87 m$ | 5. 90° | 6. आधार = 6 cm, लम्ब = 8 cm |
| 7. $10\sqrt{2} cm$ | | |

Exercise 10M08.1

- $\cos A = \frac{3}{5}, \cot A = \frac{3}{4}$
- $\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$
- $\sin \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}, \cot \theta = \frac{12}{5}, \sec \theta = \frac{13}{12}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$
- 0
- I. 1
II. 1
- 1
- $\sin A = \frac{5}{13}, \sin C = \frac{12}{13}, \cos C = \frac{5}{13}$
- I. 49/64
II. 1
- I. असत्य
II. सत्य
III. असत्य

Exercise 10M08.2

- A
- B
- A
- B
- B
- I. $-\frac{1}{2}$
II. $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$
III. $\frac{67}{12}$
- $A = 45^\circ, B = 15^\circ$
- $-\sqrt{3}$
- $\angle A = 60^\circ, \angle B = 90^\circ, \angle C = 30^\circ$

Exercise 10M08.3

- | | |
|------------------------------------|---------------|
| 1. B | 9. 25° |
| 2. A | 10. (I) 0 |
| 3. B | (II) 0 |
| 4. 36° | (III) 0 |
| 6. 88° | (IV) 1 |
| 7. $\cos 23^\circ + \sin 15^\circ$ | |

Exercise 10M08.4

1. B

2. D

3. B

4. B

5. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}, \sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

7. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \theta = \sqrt{3}, \sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} \theta = 2$

6. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

HBSE Practices Questions

1. B

2. B

3. A

4. C

5. 1

6. 0

7. 2

9. 60°

10. $\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

12. i. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ii. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Glossary

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ	–	Trigonometric Identities
त्रिकोणमितीय अनुपात	–	Trigonometric Ratios
कर्ण	–	Hypotenuse
ज्या	–	Sine
कोज्या	–	Cosine
स्पर्श ज्या	–	Tan
पूरक कोण	–	Complementary angle
सम्मुख भुजा	–	Opposite side
संलग्न भुजा	–	Adjacent side