लोक शिक्षण संचालनालय, मध्यप्रदेश

प्रश्न बैंक

(विद्यार्थियों हेतु अध्यापन सामग्री)

सत्र : 2020–21

कक्षा : 10वीं

विषयः गणित

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन) लोक शिक्षण संचालनालय, (म.प्र.)

कार्यालय, माध्यमिक शिक्षा मण्डल, म.प्र. भोपाल

ब्लूप्रिंट (प्रश्नपत्र का स्वरुप)

BLUE PRINT OF QUESTION PAPER

परीक्षाः हाईस्कूल –2019–20

कक्षा :– 10वीं पूर्णांक :– 100

विषय :– गणित समय :– 3:00

यूनिट नं.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या						कुल प्रश्न
			1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	5 अंक	6 अंक	7 अंक	100
1	संख्या पद्धति	7	1	1	-	1	-	-	-	2
2	बीज गणित	27								
	2.1 बहुपद		2	1	-	1	-	-	-	2
	2.2 दो चर वाले रेखिय समीकरण		2	-	-	1	-	-	-	1
	2.3 द्विघात समीकरण		2	-	-	-	1	-	-	1
	2.4 समान्तर श्रेढ़िया		2	-	-	1	-	-	-	1
3	त्रिकोणमिति	18								
	3.1 त्रिकोणमिति का परिचय		5	-	1	-	1	-	-	2
	3.2 त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग		1	-	-	1	-	-	-	1
4	निर्देशांक ज्यामिति	6	1	1	1	-	-	-	-	2
5	ज्यामिति	15								
	5.1 त्रिभुज		1	-	-	1	-	-	-	1
	5.2 वृत्त		2	-	1	-	-	-	-	1
	5.3 रचनाऐं		-	-	-	-	1	-	-	1
6	क्षेत्रमिति	15								
	6.1 वृत्तों से संम्बंधित क्षेत्रफल		2	-	1	1	-	-	-	2
	6.2 पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन		1	-	-	-	1	-	-	1
7	सांख्यिकी	12								
	7.1 सांख्यिकी		2	-	-	-	1	-	-	1
	7.2 प्रायिकता		1	2	-	-	-	-	-	2
	योग	100	5×5=25	5	4	7	5	-	-	21

निर्देश :– 1.प्रश्न क्रमांक 1 से 4 तक,4 प्रकार के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। जिसके अंतर्गत सत्य/असत्य, एक वाक्य में उत्तर, मेचिंग, सही विकल्प तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति के प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न में (1X4 X5 =20) अंक निर्धारित हैं।

2. प्रश्न क्र. 05 से 18 तक प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार रहेगी –

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघुउत्तरीय प्रश्न	03 अंक	लगभग 75 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	04 अंक	लगभग 120 शब्द
निबंधात्मक प्रश्न	05 अंक	लगभग 150 शब्द

3. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के छोड़कर सभी प्रश्नों में विकल्प का प्रावधन रखा जावेगा। यह विकल्प का समान इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे।

कठिनाई स्तर 40 प्रतिशत सरल प्रश्न, 45 प्रतिशत सामान्य, 15 प्रतिशत कठिन

पढ़े चलो, बढ़े चलो
RASHTRIYA MADHYAMIK SHIKSHA ABHIYAN

निदानात्मक कक्षाओं हेतु

मॉड्यूल

सत्र : **2020-21**

विषय : गणित

कक्षा : 10वीं

समग्र शिक्षा अभियान, लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र.

आमुख

प्रदेश में संचालित शासकीय हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों में छात्र/छात्राओं का परीक्षा परिणाम गणित विषय में निराशाजनक रहने लगा है। आगामी परीक्षा की तैयारी एवं श्रेष्ठ परीक्षा परिणाम हेतु यह **रेमेडियल टीचिंग हेतु मटेरियल** तैयार किया गया है। जिसके उपयोग से शिक्षक अपने समस्त छात्रों को बेहतर अंक प्राप्त करने एवं अगली कक्षा में जाने हेतु समर्थ बना सकेंगे।

इस मटेरियल को ब्लूप्रिन्ट के अनुसार उन महत्वपूर्ण पाठ्य वस्तुओं का समावेश कर तैयार किया गया है जो कि प्रभावी शिक्षण एवं छात्र–छात्राओं के गणित विषय में औसत दक्षता विकसित करने एवं परीक्षा परिणाम में सुधार हेतु लाभकारी सिद्ध होगा।

डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों का चिन्हांकन आपके द्वारा कर लिया गया होगा। यदि आपके स्कूल में एक से अधिक सेक्शन है तो विद्यार्थियों के ग्रेड के आधार पर सेक्शन में विद्यार्थियों का पुनर्वितरण कर दें। तथा एक ग्रेड के विद्यार्थियों को एक सेक्शन में रखें ताकि उन विद्यार्थियों को उनके स्तर के अनुरूप पढाया जाये।

प्रदेश के समस्त हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों के प्राचार्य एवं संबंधित शिक्षकों से अपेक्षा ही नहीं बल्कि पूर्ण विश्वास है कि वे इस माड्यूल से शाला के छात्र–छात्राओं को गणित विषय का नियमित निदानात्मक कक्षाओं में अभ्यास करायेंगे ताकि प्रत्येक विद्यार्थी परीक्षा में सफल हो सके।

शिक्षकों से अपेक्षित कार्यवाही –डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थयों को इस मॉड्यूल अनुसार अभ्यास कराएं। विद्यार्थियों को प्रत्येक प्रश्न को किस तरह लिखना है इसे समझाएं । विद्यार्थियों द्वारा की जा रही गलतियों को सुधारें।

अनुक्रमणिका

ब्लू प्रिंट(प्रश्न पत्र का स्वरूप)

हाईस्कूल परीक्षा 2020–21

कक्षा–10वीं | पूर्णांकः100

विषय– गणित | समयः 3 घण्टे

रेमेडियल टीचिंग हेतु प्राथमिकता का क्रम

स. क्र.	अध्याय	आवंटित अंक	अंकवार प्रश्नों की संख्या					प्रश्नों की संख्या
			1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	5 अंक	
1	1. वास्तविक संख्याए	7	1	1	–	1	–	2
2	2. बहुपद	8	2	1	–	1	–	2
3	3. दो चरो वाला रैखिक समीकरण	6	2	–	–	1	–	1
4	4. द्विघात समीकरण	7	2	–	–	1	–	1
5	5. समान्तर श्रेणी	6	2	–	–	–	1	1
6	7. निर्देशांक ज्यामिति	6	1	1	1	–	–	2
7	11. रचनाएँ	5	–	–	–	–	1	1
8	14. सांख्यिकी	7	2	–	–	–	1	1
9	15. प्रायिकता	5	1	2	–	–	–	2
10	8. त्रिकोणमिति का परिचय	5	5	–	–	–	–	0
		62	18	05	01	04	03	13
11	6. त्रिभुज	5	1	–	–	1	–	1
12	8. त्रिकोणमिति का परिचय	8	–	–	1	–	1	2
13	9. त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	5	1	–	–	1	–	1
14	10. वृत्त	5	2	–	1	–	–	1
15	12. वृत्तो से सम्बन्धित क्षेत्रफल	9	2	–	1	1	–	2
16	13. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	1	–	–	–	1	1
		38	7	0	03	03	02	8
	कुल	100	25	05	04	07	05	21

उपरोक्त प्राथमिकता क्रम का पालन रेमेडियल कक्षा में अनिवार्यतः करें।

अध्याय–1

वास्तविक संख्याएँ

शिक्षकों के लिए निर्देश

ब्लू प्रिंट
1 अंक के प्रश्न – 1
2 अंक के प्रश्न – 1 कुल अंक 7
4 अंक के प्रश्न – 1

- शिक्षक बच्चों को वास्तविक संख्याएँ और अवयवो, सरल भाग की प्रक्रिया से भागफल, एवं अंक गणित की आधारभूत प्रमेय, सह अभाज्य संख्या, परिमेय और अपरिमेय संख्याओं से परिचित करायें।
- शिक्षक इन अवधारणाओं को विकसित करने के लिए व्याख्यान एवं प्रदर्शन विधि, आगमन और निगमन विधि का उपयोग करेंगे।
- गतिविधि बच्चों की सहायता, चार्ट एवं Youtube की सहायता से संपन्न करायें।

उद्देश्य

- इस इकाई को पढ़ने के बाद
- आप वास्तविक संख्याओं को समझ कर जान सकेंगे।
- संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडो के गुणनफल के रूप में व्यक्त करना तथा उनकी सहायता से HCF एवं LCM ज्ञात करना सीखेंगे।
- दी गई संख्या अपरिमेय है यह विरोधाभास विधि से सिद्ध करना सीखेंगे।
- बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया के परिमेय संख्या के दशमलव प्रसार को समझकर जान सकेंगे।

प्रस्तावना

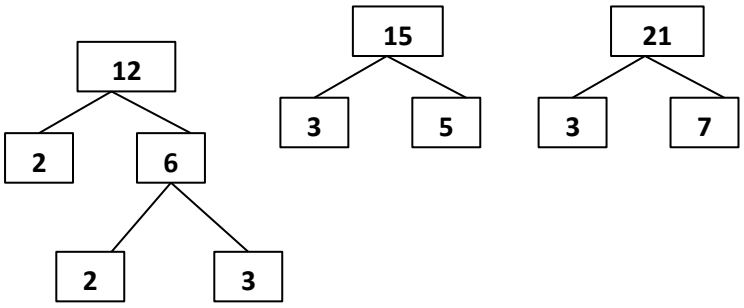
हम जानते हैं कि संख्याएँ हमारे दैनिक जीवन का अभिन्न अंग हैं, जिसमे जीवन की प्रत्येक घटना में संख्याओं का ही प्रयोग होता है। इस इकाई में हम वास्तविक संख्याओं, यूक्लिड विभाजन प्रमोयिका की सहायता HCF ज्ञात करना, प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्या के गुणनखण्ड में व्यक्त करना, बिना विभाजन के परिमेय संख्याओं को पहचान पायेंगे की दशमलव प्रसार सात है या असांत आवर्ती आदि पर चर्चा करेंगे।

विषय वस्तु

- भूमिका।
- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय।
- अपरिमेय संख्याओं का पूनर्भ्रमण।
- परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसारों का पूनर्भ्रमण।

विषय से संबंधित प्रश्न

प्र.1: संख्या 12, 15 और 21 का अभाज्य गुणन खंड विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।



12 = 2 x 2 x $\boxed{3}$ = 2^2 x 3

15 = $\boxed{3}$ x 5

21 = $\boxed{3}$ x 7

3^1 प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात है।

अत : HCF (12, 15, 21) = 3^1 = 3

2^2, 3^1, 5^1 और 7^1 प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घाते हैं, जो तीनों संख्याओं से संबद्ध है।

अत : LCM (12, 15, 21) = 420

प्र.2 : किसी खेल के मेदान के चारों और एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया का 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

हल : LCM (12, 18)

= 2 x 2 x 3 x 3

= 36

2	18
3	9
3	3
	1

2	12
2	6
3	3
	1

अत : 36 मिनट के बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे।

प्र.3 : सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर : माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{5} = \frac{a}{b}$, जहाँ a, b सहअभाज्य धनात्मक पूर्णांक है और $b \neq 0$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$\Rightarrow 5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 5\,b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{5} = b^2$ = पूर्णांक

अतः a^2, 5 से विभाजित है।

=> a भी 5 से विभाजित होगा। (प्रमेय 1.3 से)

अतः हम a = 5 c लिख सकते हैं, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a के इस मान को $a^2 = 5\,b^2$ में रखने पर

$\therefore (5\,c)^2 = 5\,b^2 \Rightarrow 25\,c^2 = 5\,b^2$

$\Rightarrow b^2 = 5\,c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{5} = c^2$ = पूर्णांक

अतः b^2, 5 से विभाजित है।

=> b भी 5 से विभाजित है। (प्रमेय 1.3 से)

अतः a और b का एक और उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। परन्तु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सह अभाज्य है।

अतः $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र.4 : सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिजित संख्या है।

उत्तर : माना $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore 3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ जहाँ a, b सहअभाज्य धनात्मक पूर्णांक है और $b \neq 0$

अतः $2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$

$\sqrt{5} = \frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$

चूँकि a, b, 2 और 3 धनात्मक पूर्णांक है

$\therefore \frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$ एक परिमेय संख्या है।

=> $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है

परन्तु $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

जो कि उपरोक्त कथन का विरोधाभास है।

अतः $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्र.5 : बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नालिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{6}{15}$

इनके परिमेय प्रसार यदि सांत है, तो दशमलव में भी व्यक्त कीजिए।

हल : (i) $\frac{13}{3125}$,

दी गई परिमेय संख्या p/q के रूप का है जहाँ

q = 5 x 5 x 5 x 5 x 5

=> q = 5^5 जो कि $2^n 5^m$ के रूप का है।

अत : $\frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

अब $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5}$

$= \frac{13\times2\times2\times2\times2\times2}{5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times2}$

$= \frac{13\times32}{10\times10\times10\times10\times10} = \frac{416}{100000}$

5	3125
5	625
5	125
5	25
5	5
	1

= 0.00416

हल : (i) $\frac{64}{455}$,

दी गई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप का है जहाँ

q = 5 x 7 x 13 जो कि $2^n 5^m$ के रूप का नहीं है।

अत : $\frac{64}{455}$ का द ामलव प्रसार असांत आवर्ती है।

जहाँ m, n प्राकृत संख्या है।

5	455
7	91
13	13
	1

पुनरावृत्ति

1. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए। (i) 17, 23, 29, (ii) 8, 9 और 25.
2. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
3. सिद्ध कीजिए कि 5-$\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

4. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (ii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (iii) $\frac{77}{210}$ (iv) $\frac{29}{343}$

स्मरणीय बिंदु

- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय : प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।
- किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांको a और b के लिए, HCF (a, b) x LCM (a, b) = a x b.
- माना p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ एक a धनात्मक पूर्णांक है।
- माना x एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है तब x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q सहअभाज्य है तथा q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप का है जहाँ m, n कोई ऋणेतर पूर्णांक है।

गृहकार्य

1) HCF (306, 657) = 9 दिया है, LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

2) व्याख्या कीजिए कि 7 x 11 x 13 + 13 और 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 + 5 भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।

3) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

कार्यपत्रक – 01 M.M. 10

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :– 1 x 3 = 3

(i) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ का मान है :–

(a) $\sqrt{5}$ (b) 0

(c) 4 (d) 5

(ii) $\frac{13}{2^3 5^2}$ का दशमलव प्रसार होगा :–

(a) सांत (b) असांत आवर्ती

(c) असांत अनावर्ती (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) दो अपरिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमेय संख्याएँ होती हैं :–

(a) 1 (b) कोई नहीं

(c) अनेक (d) 10

2. एक शब्द में अथवा एक वाक्य में उत्तर दीजिए :– 1 x 3 = 3

(i) परिमेय संख्या को परिभाषित कीजिए।

(ii) $\frac{35}{50}$ का दशमलव प्रसार लिखिए।

3. रिक्त स्थानों की पूर्ती कीजिए :– 1 x 4 = 4

(i) $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि _____ संख्याएँ हैं।

(ii) यदि p कोई _____ संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ एक धनात्मक पूर्णांक है।

(iii) HCF (15, 8) = _____

(iv) (7 x 11 x 23 + 7) एक _____ संख्या है।

कार्यपत्रक – 02

सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

1. $\frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार ज्ञात कीजिए।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

2.जांच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n, 0 पर समाप्त हो सकती है।

3. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय लिखिए।

अध्याय–2

बहुपद

शिक्षकों के लिये निर्देश

1. इस अध्याय हेतु कुल 8 अंक आबंटित हैं :

   1 अंक – 2 प्रश्न (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

   2 अंक – 1 प्रश्न (लधुत्तरीय प्रश्न)

   4 अंक – 1 प्रश्न (दीर्घउत्तरीय प्रश्न)

2. शिक्षक बच्चों को बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ, किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध, बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म से संबंधित अवधारणाओं से बच्चों को अवगत करायें।
3. शिक्षक व्याख्यान विधि, प्रदर्शन विधि, आगमन एवं निगमन विधि का उपयोग करेंगे।
4. प्रत्येक अवधारणा से संबंधित प्रश्नों का अभ्यास बच्चों द्वारा करायें।

उद्देश्य :–

1. बच्चों को बहुपद संबंधी पूर्व ज्ञान का पुनरावृत्ति करना।
2. बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ समझाना।
3. किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांको में संबंध स्थापित करना।
4. बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म समझाना।

प्रस्तावना :–

आप पिछली कक्षा में बहुपदों एवं उनकी धातों के बारे में जान चुके हैं। आप जानते हैं कि चर x के बहुपद p (x) में x की उच्चतम घात, बहुपद की घात कहलाती है। उदाहरण के लिए 3x+ घात 1 का बहुपद है तो x^5+3x^5+5, घात 5 का बहुपद है।

एक घात के बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए $3x+5, \sqrt{2}\,y+7, \frac{2}{5}x+5$ इत्यादि बहुपद, रैखिक बहुपद हैं। घात 2 के बहुपद को द्विधात (वर्ग) बहुपद कहते हैं।

उदाहरण के लिए $3x+5, x+7, \sqrt{5}\,y^2+7, 4x^2+\frac{1}{8}$, इत्यादि द्विघात (वर्ग) बहुपद हैं। घात 3x+5, के बहुपदों को द्विघात बहुपद कहते हैं। उदाहरण के लिए $x^3-2, 3x^3, x^3-x^2+3, 1+x-2x^2$ इत्यादि त्रिघात बहुपद हैं।

व्यापक रूप से रैखिक बहुपद को $ax + b, a \neq 0$ प्रदर्शित किया जाता है।

द्विघात बहुपद को ax^2+bx+c से तथा त्रिघात बहुपद को ax^3+bx^2+c, $a \neq 0$ से प्रदर्शित किया जाता है।

अब $p(x) = x^2-3x-4$ का $x = -1$ पर

मान ज्ञात करते हैं।

$p(-1) = (-1) - 3(-1) - 4$

$= 1 + 3 - 4$

$= 4 - 4$

$= 0$

मान लीजिए कि $x = 4$ पर

$p(x) = x^2-3x-4$

$= 16 - 12 - 4$

$= 16 - 16$

$= 0$

अतः -1 और 4 बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के दो शून्यक हैं।

पिछली कक्षा में आप पढ़ चुके हैं कि किसी रैखिक बहुपद का शून्यक कैसे ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $p(x) = 2x + 3$ का शून्यक k है, तो $p(k) = 0$ से, हमें

$2k+3=0$

$= k = -\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में यदि $p(x) = ax + b$ का एक भून्यक k है तो $p(k) = ax + b = 0$ अर्थात् $k = \frac{-b}{a}$ होगा।

अतः रैखिक बहुपद का शून्यांक उसके गुणांकों से संबंधित है। क्या यह अन्य बहुपदों में भी होता है। उदाहरण के लिए, क्या किसी द्विघात बहुपद में भी एसा होता है। इन प्रश्नों का उत्तर समझने के लिए इस अध्याय में हम अध्ययन करेंगे। बहुपदों के विभाजन की कलन विधि का भी अध्ययन किया जायेगा।

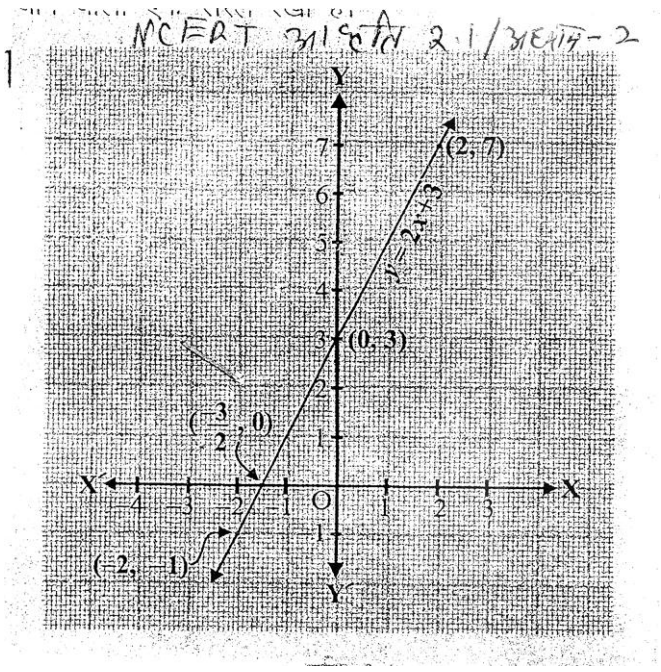
विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण :–

गतिविधि –1

रैखिक समीकरण $y = 2x+3$ पर विचार करते हैं। इस रेखा का ग्राफ खींचने के लिए तालिका अनुसार कुछ बिन्दु ज्ञात करते हैं, जो दी हुई समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

x	-2	2
y = 2x+3	-1	7

$y = 2x+3$ का ग्राफ निम्नानुसार होगा :



यहाँ हम जानते हैं कि 2x+3 का शून्यांक $\frac{-3}{2}$ है तथा $y = 2x+3$ का ग्राफ x अक्ष को भी उस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है जिसका x निर्देशांक $\frac{-3}{2}$ है।

अतः बहुपद 2x+3 का शून्यक उस बिन्दु का निर्देशांक है, जहाँ $y = 2x+3$ का ग्राफ x अंक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

व्यापक रूप में, एक रैखिक बहुपद ax+b, $a \neq 0$ के लिए, $y = ax+b$ का ग्राफ एक सरल रेखा है, जो x अंक्ष को ठीक एक बिन्दु $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अतः रैखिक बहुपद ax+b, $a \neq 0$ का केवल एक शून्यक है, जो उस बिन्दु का x निर्देशांक है, जहाँ $y = ax+b$ का ग्राफ x अंक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

गतिविधि – 2

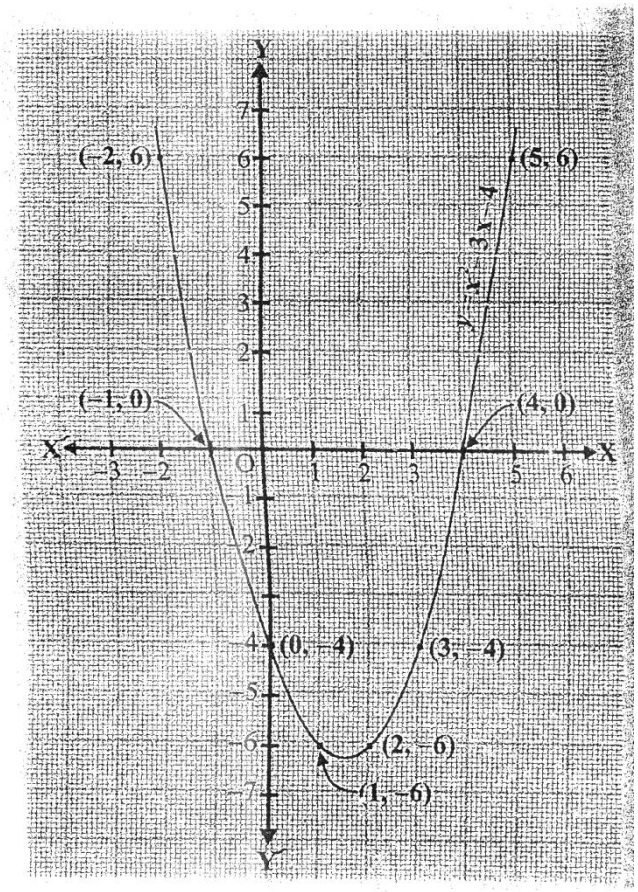
अब आइए हम द्विघात बहुपद के किसी शून्यक का अर्थ जानें।

द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ पर विचार करते हैं। आइए देखें कि $x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ किस प्रकार का दिखता है।

हम के कुछ मानों के संगत के कुछ मानों को लेते हैं:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

यदि हम उपर्युक्त बिन्दुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करें और ग्राफ खीचें तो ग्राफ इस प्रकार दिखेगा :



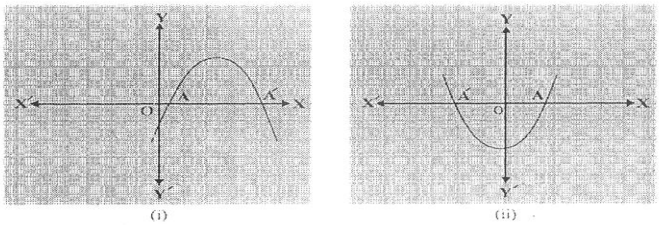
वास्तव में किसी द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के लिए संगत समीकरण $y=ax^2 +bx+c$ के ग्राफ का आकार या तो ऊपर की और खुला U की तरह अथवा नीचे की और खुला $\cap$ की तरह का होगा, जो इस पर निर्भर करेगा कि $a>0$ है या $a<0$ है (इन वक्रों को परवलय कहते हैं)।

सारणी से हम देखते हैं कि द्विघात बहुपद के शून्यक –1 तथा 4 हैं, इस पर भी ध्यान दीजिए कि –1 तथा 4 उन बिन्दुओं के निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 – 3x - 4$ का ग्राफ x अंक्ष को प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार, द्विघात बहुपद $x^2 – 3x – 4$ के शून्यक उन बिन्दुओं के निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 – 3x -4$ का ग्राफ x – अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। यह तथ्य सभी द्विघात बहुपदों के लिए सत्य है, अर्थात् द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के शून्यक उन बिन्दुओं के x निर्देशांक हैं, जहाँ $y = ax^2 + bx + c$ को विकसित करने वाला परवलय x – अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

$y = ax^2 + bx + c$ के ग्राफ के आकार का प्रेक्षण करने से तीन निम्नलिखित स्थितियाँ संभावित हैं।

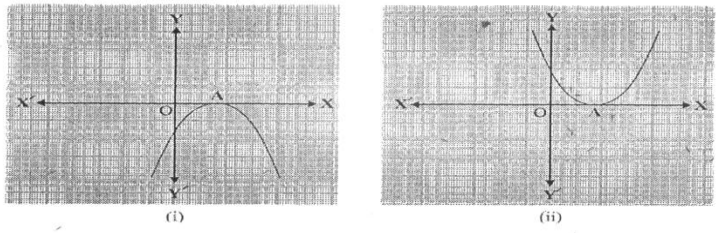
स्थिति 1

यहाँ ग्राफ x – अक्ष को दो भिन्न बिन्दुओं A और A' पर काटता है। इस स्थिति में, A तथा A' के निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के दो शून्यक हैं।



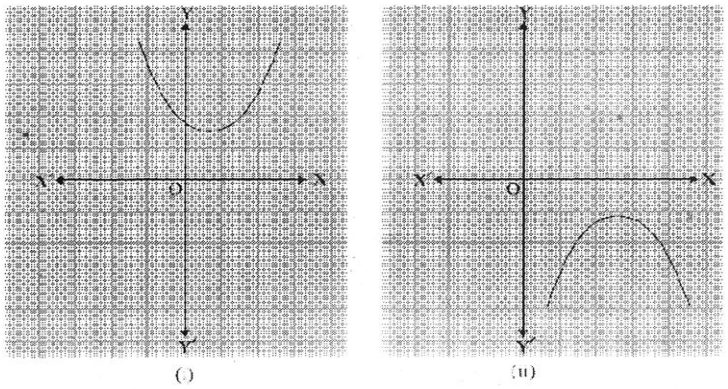
स्थिति 2

यहाँ ग्राफ x – अक्ष को केवल एक बिंदु पर, अर्थात् दो संपाती बिन्दुओं पर काटता है। इसलिए, स्थिति 1 के दो बिंदु A और A' यहाँ पर संपाती होकर एक बिंदु A हो जाते हैं। इस स्थिति में, A का x- निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का केवल एक शून्यक है।



स्थिति 3

यहाँ ग्राफ या तो पूर्ण रूप से x – अक्ष के ऊपर या पूर्ण रूप से x – अक्ष के नीचे हैं। इसलिए, यह x-अंक्ष को कहीं पर नहीं काटता है। अतः इस स्थिति में द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का कोई भून्यक नहीं है।



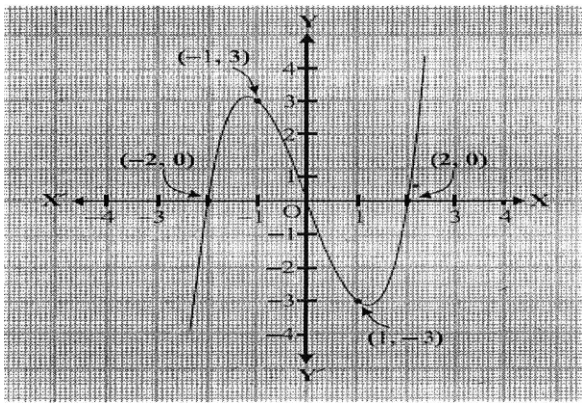
इस प्रकार, आप ज्यामितीय रूप में देख सकते हैं कि किसी द्विघात बहुपद के दो भिन्न शून्यक, या दो बराबर शून्यक (अर्थात् एक शून्यक) या कोई भी शून्यक नहीं, हो सकते हैं।

गतिविधि 3

अब आप एक त्रिघात बहुपद के शून्यकों के ज्यामितीय अर्थ के बारे में क्या आशा कर सकते हैं। आइए इसे ज्ञात करें। त्रिघात बहुपद $x^3 - 4x$ पर विचार कीजिए। इसे देखने के लिए कि $y=x^3-4x$ का ग्राफ कैसा लगता है, आइए x के कुछ मानों के संगत y के कुछ मानों को सूचीबद्ध करें,

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

सारणी के बिन्दुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करने और ग्राफ खींचने पर, हम देखते हैं कि $y=x^3-4x$ का ग्राफ इस प्रकार दिखता है,



उपर्युक्त सारणी से हम देखते हैं कि त्रिघात बहुपद के शून्यक –2, 0 और 2 हैं। ध्यान दीजिए कि –2, 0 और 2 वास्तव में उन बिन्दुओं के निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ x-अंक्ष को केवल इन्हीं बिंदुओं पर काटता है, इसलिए बहुपद के शून्यक केवल इन्हीं बिन्दुओं के x-निर्देशांक हैं।

ध्यान दीजिए कि बहुपद x^3 का केवल एक शून्यक 0 है। इसी प्रकार, क्योंकि $x^3 - x^2 = x^2 (x - 1)$ इसलिए बहुपद के शून्यक केवल 0 और 1 हैं।

व्यापक रूप में, घात n के दिए गए बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ x-अंक्ष को अधिक से अधिक n बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है। अतः घात के किसी बहुपद के अधिक से अधिक n शून्यक हो सकते हैं।

निर्देश :–

1. शिक्षक बच्चों से $y = ax+b$, $y = ax + bx^2 + c$ रूप के समीकरणों के ग्राफ का अभ्यास करायें।

2. $ax + b$ एवं $ax^2 + bx + c$ रूप के बहुपदों के शून्यकों को क्रमशः $y = ax+b$ एवं $y=ax^2+bx+c$ के ग्राफों की मदद से स्पष्ट करें।

पुनरावृत्ति प्रश्न :–

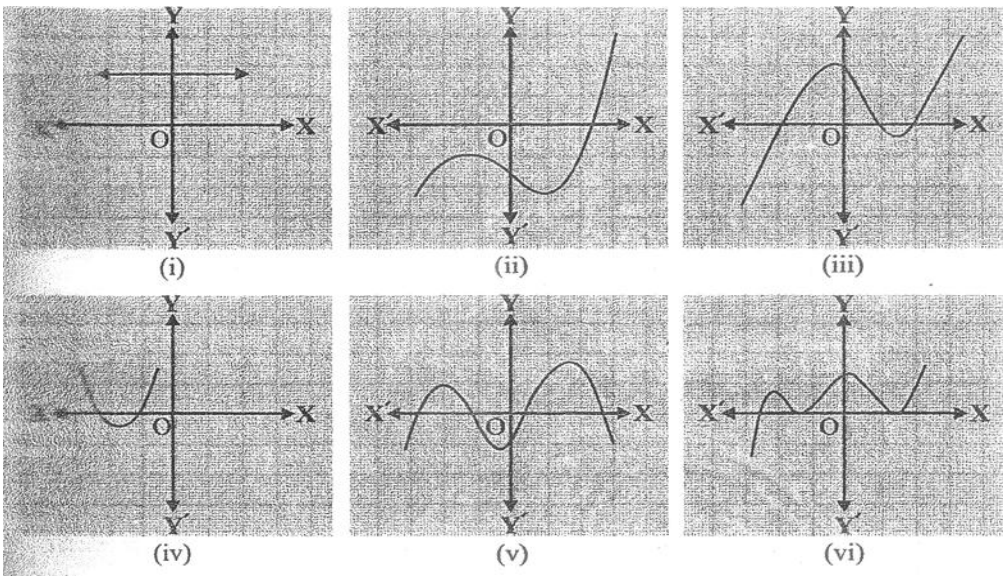
1. $y = 3x+4$ का ग्राफ खीचें।
2. बहुपद $x^2 - 16$ के भून्यक ज्ञात कीजिए।

कक्षा कार्य :–

1. $2x + 3y = 6$ का ग्राफ बनाइये।
2. यदि $2x - 3k$ का भून्यक 5 हो, तो k का मान क्या होगा।

गृह कार्य :–

1. किसी द्विघात बहुपद के अधिकतम कितने भून्यक हो सकते हैं।
2. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है, प्रत्येक स्थिति में $p(x)$ के भून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण – 2

गतिविधि – 1

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध (Relation between Zeroes and Coefficients of a Polynominal)

- यदि α रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का शून्यक है, तो $\alpha = -\frac{b}{a}$ होगा।
- यदि α और β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो हम जानते हैं कि $x - a$ और $x - \beta$ $p(x)$ के गुणनखंड होंगे।

अतः $a x^2 + bx + c = k (x - \alpha) (x - \beta)$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = k \mid x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta \mid$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = k x^2 - k (\alpha + \beta) x + k\alpha\beta$

$\Rightarrow a = k, b = -k (\alpha + \beta), c = k\alpha\beta$

इससे प्राप्त होता है कि $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

तथा $\alpha.\beta = \frac{c}{a}$

- यदि α, β और y त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d$ के शून्यक हैं, तो

$\alpha + \beta + y = -\frac{b}{a}$,

$\alpha.\beta + \beta.y + y.\alpha = \frac{c}{a}$ तथा

$\alpha.\beta.y = -\frac{d}{a}$ होगा।

उदाहरण 1 :

द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : द्विघात बहुपद $p(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यकों के लिए

$p(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x (x-4) + 2 (x - 4) = 0$

$\Rightarrow (x-4) (x +2) = 0$

$\Rightarrow x=4, x = -2$

$\Rightarrow \alpha =4, \beta = -2$

अतः द्विघात बहपुद $p(x) = x^2 - 2x - 8$ के शून्यक 4 और -2 हैं।

उदाहरण 2 एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}, -1$ हैं।

हल :

माना कि α तथा β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं।

प्रश्नानुसार

$\alpha + \beta = \frac{1}{4}$ तथा $\alpha.\beta = -1$

$-\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$ तथा $\frac{c}{a} = -1$

तुलना करने पर $a = 4, b = -1$ तथा $c = -4$

अत : अभीष्ट द्विघात बहुपद $4x^2 - x - 4$ होगा।

निर्देश :– शिक्षक बच्चों को रैखिक बहुपद एवं द्विघात बहुपद में उनके शून्यकों और गुणांकों में संबंध को समझायें एवं याद करायें।

पुनरावृत्ति प्रश्न :–

1. द्विघात बहुपद $t^2 - 15$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।
2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः 1 और 1 हैं।

कक्षा कार्य :–

1. द्विघात बहुपद $4x^2 - 4x + 1$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।
2. द्विघात बहुपद बनाइये जिसके शून्यक 3 एवं 4 हैं।

गृह कार्य :–

1. द्विघात बहुपद $4x^2 - 8x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच को संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।
2. द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $-\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ हैं।

स्मरणीय बिन्दु

1. घातों $1, 2$ और 3 के बहुपद क्रमशः रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
2. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ के रूप का होता है।
3. एक बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिन्दुओं के x-निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x-अंक्ष को प्रतिच्छेद करता है।
4. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के अधिक से अधिक दो भून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।
5. यदि द्विघात बहुपद के शून्यक α और β हों, तो

$\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ और

$\alpha . \beta = \frac{c}{a}$

6. यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\ \beta\ \gamma = -\frac{d}{a}$

कार्यपत्रक – बहुपद

1 अंक वाले प्रश्न

प्रश्न 1 :–सही विकल्प चुनिये :

(i) $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं :–

(a) $-2, 0$ (b) $-2, 2$

(c) $0, 2$ (d) $1, 2$

(ii) निम्नलिखित में से बहुपद हैं :–

(a) $x^2 + 3\sqrt{x} + 3$ (b) $ax^2 + \sqrt{x} + c$

(c) $x^2 + 3x + 5$ (d) $x^2 + \frac{1}{x} + 1$

(iii) बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यकों का योग होगा :

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{c}{a}$

(iv) बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यकों का गुणनफल होगा :–

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $-\frac{b}{a}$ (c) $\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{c}{a}$

प्र न 2 :– रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :–

(i) द्विघात बहुपद की घात _____ होती है।

(ii) दो बहुपदों का योग भी _____ होता है।

(iii) भाज्य = भाजक × भागफल + _____

(iv) रैखिक बहुपद की घात _____ होती है।

(v) बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यकों का योगफल _____ होगा।

प्र न 3 :– सत्य/असत्य लिखिए :–

(i) चर x के बहुपद $p(x)$ में की उच्चतम घात, बहुपद की घात कहलाती है।

(ii) एक बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिन्दुओं के y-निर्देशांक होते हैं, जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

(iii) एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं।

(iv) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों तो $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ होता है।

(v) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों तो $\alpha.\beta = \frac{b}{a}$ होता है।

प्र न 4 :– एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :–

(i) रैखिक बहुपद की घात कितनी होती है ?

(ii) द्विघात बहुपद के अधिकतम कितने शून्यक हो सकते हैं।

(iii) यदि $\alpha.\beta$ द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हों तो $\alpha + \beta$ का मान कितना होगा।

(iv) यदि $\alpha.\beta$ द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हों तो $\alpha.\beta$ का मान कितना होगा।

(v) बहुपद $3x+7$ का शून्यक क्या होगा।

2 अंक वाले प्रश्न

प्रश्न 5 :– एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 0 और $\sqrt{5}$ हों।

प्रश्न 6 :– जाँच कीजिए कि बहुपद $+x^2 - 5x + 2$ के शून्यक $1, -2$ हैं या नहीं।

4 अंक वाले प्रश्न

प्रश्न 7 :–द्विघात बहुपद $3x^2 - x - 4$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

टेस्ट पेपर (वास्तविक संख्याएँ, बहुपद)

20 अंक

प्र.1) सत्य/असत्य लिखें :– (1x5=5)

a) $\frac{13}{2^3 5^2}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

b) दो अपरिमेय संख्याओं के मध्य अनंत अपरिमेय संख्याएँ प्राप्त की जा सकती है।

c) $x^2 - 2x$ के शून्यक 0 तथा 2 है।

d) शून्य बहुपद की घात परिभाषित नही है।

e) $ax^3 + bx^2 + cx + d$ में शून्यकों का गुणनफल $\frac{-d}{a}$ होता है।

प्र.2) (a) यदि HCF (306, 657) = 9 हो, तो LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए। (2)

(b) व्याख्या कीजिए कि 7 x 11 x 13 + 13 भाज्य संख्याएँ क्यों है। (2)

प्र.3) द्विघात बहुपद $.x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए। (4)

प्र.4) एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं : (4)

a) $\frac{1}{4}, -1$ b) $-3,\ 2$

अध्याय–3

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

1 अंक के प्रश्न – 2 प्रश्न
4 अंक के प्रश्न – 1 प्रश्न } कुल अंक – 06

शिक्षकों के लिए निर्देश :

- Blueprint के आधार पर 1 अंक व 4 अंक हेतु उचित/उपयुक्त प्रश्नों (सवालो) का कक्षा में अधिक अभ्यास कराया जावे।
- चर अचर तथा रैखिक बहुपद व रैखिक समीकरण की अवधारणा स्पष्ट की जानी चाहिए।
- कक्षा में करवाई जाने वाली गतिविधि में प्रत्येक विद्यार्थियों की सहभागिता सुनिश्चित होगें।
- प्रश्न के हल लिखने के तरीके विशेष रूप से विद्यार्थियों को बताए जावें।
- हल के किस विशेष भाग पर कितने अंक प्राप्त हो सकते हैं, इस पर विद्यार्थियों से चर्चा करना आवश्यक है।
- हल के ''उत्तर'' को हाइलाइट करके लिखना एवं जहाँ अस्तित्व हो इकाई लिखने के महत्व की चर्चा भी विद्यार्थियों से आवश्य की जावे।
- ग्राफ पेपर व ग्राफ बोर्ड का उपयोग आवश्यक हो।
- रंगीन चॉक का प्रयोग आलेखन, व गुणांको की तुलना में प्रभावी होगा।

उद्देश्य :–

- विद्यार्थी दो चर वाले रैखिक समीकरण के मानक रूप को समझ सकेंगे व पहचानेगें।
- प्रश्न समझ सकेगें।
- पाठ्य पुस्तक में दी गई आलेखी व बीजगणितीय विधियों को विद्यार्थी सीखेंगे।
- हलः– प्राप्त करने में विद्यार्थी दक्ष हो सकें।

प्रस्तावना :– विद्यार्थीयों के पूर्वज्ञान के आधार पर विद्यार्थियों से निम्नानुसार कुछ प्रश्नों द्वारा चर्चा की जा सकती है, जैसेः–

- चर, अचर के उदाहरण बताइये।
- रैखिक व द्विघाती बहुपद के उदाहरण दे व उनमें क्या अंतर है। बताइये
- एक चर वाले रैखिक बहुपद कौन से होगें?
- दो चर वाले रैखिक बहुपद कौन से होगें?
- बहुपद व समीकरण में विशेष अंतर क्या होगा?

प्रत्येक बिन्दु पर चर्चा के दौरान शिक्षक द्वारा सही उदाहरण देकर विद्यार्थियों की त्रुटियों को अथवा गलत अवधारणाओं को दूर करते हुए दो चर वाले रैखिक समीकरण को सही अवधारणा व मानक रूप को स्पष्ट किया जावे।

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

जहाँ x व y चर हैं

a, b, c वास्तविक संख्याएँ $a \neq 0, b \neq 0$

गतिविधि :–

शिक्षक – पूरब, तुम्हें मैने पेन और पेन्सिल दुकान से लेने भेजा था उसका हिसाब तो दो, तुम कितने रूपये खर्च करके आये हो।

पूरब – जी, मैं 3 पेन और 2 पेन्सिल, 21 रूपये में लाया हूँ। एक पेन 5 रू. का और एक पेन्सिल 3 रू. की।

शिक्षक – पूरी क्लास ध्यान से देखे और सुने यहाँ पूरब क्या हिसाब दे रहा है,

पूरब तुम जो कह रहे हो उसे हम बोर्ड पर लिखते हैं,

	3 × एक पेन की कीमत	=	15 रूपये
+	2 × एक पेन्सिल की कीमत	=	6 रूपये
	कुल	=	21 रूपये

अर्थात्: 3 पेन + 2 पेन्सिल = 21 रूपये

शिक्षक – यदि हम एक पेन की कीमत को संकेत x व एक पेन्सिल की कीमत को संकेत y मान लें तो, इस प्रकार लिख सकते हैं, उपरोक्त कथन को

$$\boxed{3x + 2y = 21}$$

सभी विद्यार्थी – जी

शिक्षक – पूरब, अब यदि तुम 2 पेन और एक पेन्सिल मनीष को दे दो तो उससे तुम कितने पैसे लोगे? बोर्ड पर लिख कर बताओ,

पूरब –	2 × एक पेन की कीमत	=	10 रूपये
+	1 × एक पेन्सिल की कीमत	=	3 रूपये
	कुल	=	13 रूपये

(पूरब बोर्ड पर लिखता है)

शिक्षक – दीपक, अब इसे x व y के रूप में लिखो

दीपक – जी सर

$2x + 1y = 13$

शिक्षक – सभी विद्यार्थी देखें, क्या दीपक ने सही लिखा है?

माया – सर इसे एक और तरीके से भी लिखा जा सकता है, क्या मैं लिखूँ

शिक्षक – हाँ, ज़रूर

माया – बोर्ड पर लिखती है

$2x + y = 13$

शिक्षक – भाबा ा, माया

- ❖ उपरोक्तानुसार शिक्षक दैनिक जीवन से जुड़ी परिस्थितियों के आधार पर विद्यार्थियों को दो चर वाले रैखिक समीकरण की अवधारणा से परिचित करा सकते हैं।

विषय वस्तु प्रस्तुतिकरण :–

दिए गए समीकरण निकाय,

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ के लिए

अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण	संगत / असंगत
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय)	संगत
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से से अनेक हल	संगत
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं	असंगत

उपरोक्त सारणी बोर्ड पर बनाकर, दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म द्वारा विद्यार्थियों से चर्चा की जावे, जैसे,

$3x + 2y = 21$ या $3x + 2y - 21 = 0$ -(1)

$2x + y = 13$ $2x + y - 13 = 0$ -(2)

$a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ c_1 = -21$

$a_2 = 2,\ b_2 = 1,\ c_2 = -13$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ एवं $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{1}$ तथा $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अत : प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा अद्वितीय हल प्राप्त होगा।

"आलेखी विधि" द्वारा दो चर वाले रैखिक समीकरण निकालने का हल :–

प्रश्न (i) :– $x - y = 8$

$3x - 3y = 16$

दिए गए रैखिक समीकरण युग्म की जाँच कीजिए कि यह संगत / असंगत है, यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

हल :– दिए गए रैखिक समीकरणों के युग्म :–

$x - y = 8$ और $3x - 3y = 16$

$\Rightarrow$ $x - y - 8 = 0$ -(1) $3x - 3y - 16 = 0$ -(2)

मानक रूप से तुलना करने पर :–

$a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ c_1 = -8$

$a_2 = 3,\ b_2 = -3,\ c_2 = -16$

अब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$

$\because$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ अर्थात् $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

$\therefore$ दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा।

या

दिया गया समीकरण युग्म असंगत है।

एवं ग्राफीय निरूपण समांतर रेखाएँ प्राप्त होंगी।

प्र न (ii) :– दिए गए रैखिक समीकरण युग्म की जाँच कीजिए कि यह संगत/असंगत है, यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

$2x + y - 6 = 0$ -(1)

$4x - 2y - 4 = 0$ -(1)

उपरोक्त समीकरणों की $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ से तुलना करने पर

$a_1 = 2$ $b_1 = 1$ $c_1 = -6$

$a_2 = 4$ $b_2 = -2$ $c_2 = -4$

अब, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

∴ समीकरण युग्म संगत हैं और इनका एक अद्वितीय हल होगा।

आलेखी विधि से हल :–

समी. (1) से, $2x + y - 6 = 0$ -(1)

$\boxed{x = 0}$ लेने पर	$\boxed{y = 0}$ लेने पर	$\boxed{x = 1}$ लेने पर
$2(0) + y - 6 = 0$	$2x + 0 - 6 = 0$	$2(1) + y - 6 = 0$
$y - 6 = 0$	$2x - 6 = 0$	$2 + y - 6 = 0$
$\boxed{y = 6}$	$2x = 6$	$y = 6 - 2$
	$x = \frac{6}{2}$	$\boxed{y = 4}$
	$\boxed{x = 3}$	

अतः

X	0	3	1
Y	6	0	4

अब समी. (2) से, $4x - 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow$ $2x - y - 2 = 0$ (समी. में 2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow$ $2x - y = 2$

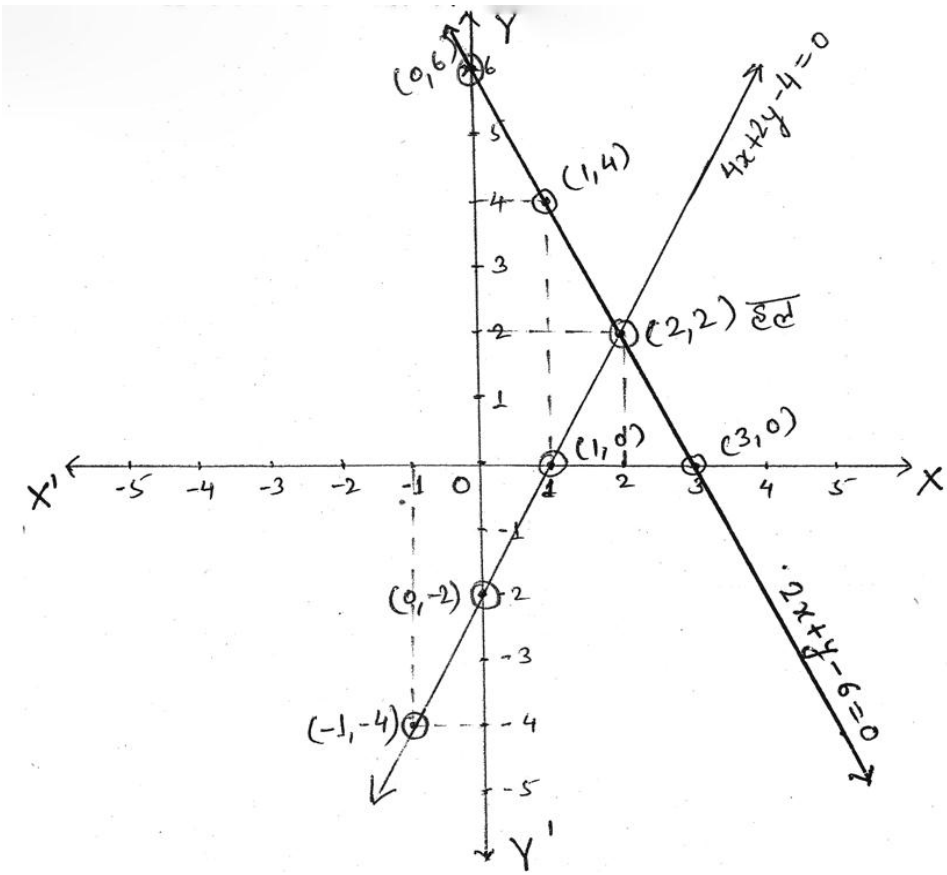
उपरोक्त सभी. में

$\boxed{x = 0}$ लेने पर	$\boxed{y = 0}$ लेने पर	$\boxed{x = -1}$ लेने पर
$2(0) - y = 2$	$2x - 0 = 2$	$2(-1) - y = 2$
$-y = 2$	$2x = 2$	$-2 - y = 2$
$\boxed{y = -2}$	$x = \frac{2}{2}$	$-y = 2 + 2$
	$\boxed{x = 1}$	$\boxed{y = -4}$

अतः

X	0	1	–1
Y	– 2	0	– 4

समीकरण (1) व (2) से प्राप्त बिन्दुओं को आलेख पर दर्शाएगे



यहाँ पर प्राप्त दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं जो बिन्दु (2, 2) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः हल होगा $\boxed{x = 2, \quad y = 2}$ उत्तर

नोट –

- समीकरणो के लिए बिन्दु प्राप्त करने हेतु $x = 0, y = 0$ लेकर केवल दो बिन्दु प्राप्त करना भी रेमेडियल कक्षा हेतु पर्याप्त होगा।
- रेखाओं के आलेखन में रंगीन चॉक का उपयोग अत्यधिक प्रभावी होगा।

(i) विलोपन विधि

(ii) प्रतिस्थापन विधि

किसी एक दिए गए समीकरण निकाय को उपरोक्त दोनों विधि से हल करो।

समीकरण निकाय, $x + y = 5$ – (1)

$3x + 4y = 10$ – (2)

(i) विलोपन विधि :– सर्वप्रथम यह देखा जाए कि x के व y के दोनों समीकरणों में गुणांक किस प्रकार हैं और उनमें से किसी एक को किस प्रकार समान किया जा सकता है, उनके चिन्ह समान है या विपरीत आदि,

जैसे, समी. (1) में यदि 3 का गुणा किया जाए तो x का गुणांक समी (2) के x के गुणांक के तुल्य/बराबर हो जाएगा और चूंकि उनके चिन्ह समान हैं तब वे घटाने पर विलोपित हो जाएंगे।

अतः [समीकरण (1) x 3] - [समीकरण (2)] करने पर :–

$$\Rightarrow \quad [x + y = 5] \times 3$$

$$- \quad [3x + 4y = 10]$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 3y = 15$$

$$- \quad 3x - 4y = -10$$

$$\Rightarrow \quad -y = 5$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -5}$$

पुन : [समीकरण (1) x 4] - [समीकरण (2)] करने पर :–

$$\Rightarrow \quad [x + y = 5] \times 4$$

$$- \quad [3x + 4y = 10]$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 4y = 20$$

$$-3x - 4y = -10$$

$$\Rightarrow \quad x = 10$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 10}$$

अतः उत्तर – $\boxed{x = 10,\ y = -5}$

(ii) प्रतिस्थापन विधि – इस विधि में किसी एक चर को दूसरे चर से प्रतिस्थापित करना होता है, जैसे, समीकरण (1) से x का मान y के पदों में लिखने पर,

$$x + y = 5 \qquad -(1)$$

$$\Rightarrow \quad x = 5 - y \qquad -(3)$$

अब समीकरण (3) से (जो कि मूल रूप से समीकरण (1) ही है)

अब समीकरण (3) में रखने (प्रतिस्थापित) करने पर :–

$$3x + 4y = 10 \qquad -(2)$$

$$\Rightarrow \quad 15 - 3y + 4y = 10$$

$$\Rightarrow \quad 15 + y = 10$$

$$\Rightarrow \quad y = 10 - 15$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = -5}$$

अब y = –5 समीकरण (3) में रखने पर :–

$$x = 5 - y$$

$x = 5 - (-5) = 5+5$

$\boxed{x = 10}$

उत्तर – $\boxed{x = 10,\ y = -5}$

इस प्रकार दोनों ही विधियाँ उपर्युक्त हैं।

(iv) दिए गए समीकरण युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदलकर हल करना,

- इस प्रकार की समस्याओं (सवालों) में कुछ सरल प्रश्न ही कराए जावें जैसे,

  (a) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$, $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = 13$

  (b) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

  $\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 1$

{ विद्यार्थियों के स्तर को देखते हुए (iv) प्रकार के प्रश्नों को हल/विधि करवाई जाए अन्यथा इन्हें छोड़ दिया जाए, केवल कमज़ोर विद्यार्थीयों के लिए। **}**

विद्यार्थी समान्यतः कहाँ गलतियाँ करते हैं (विशेष बिन्दु/स्मरणीय बिंदु)

- ''पूर्व'' या ''पहले'' या ''कम'' भाब्द के लिए ऋण (–) चिन्ह का प्रयोग होता है।
- ''बाद'' या ''अधिक'' भाब्द के लिए धन (+) चिन्ह का प्रयोग होता है।
- दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं का अंतर सदैव 1 होता है।

  अतः पहली प्राकृत संख्या = x

  क्रमागत प्राकृत संख्या = x + 1 या x - 1

- दो क्रमागत सम अथवा विषम संख्याओं में सदैव 2 का अंतर होता है,

  अतः पहली संख्या = x

  क्रमागत संख्या = x + 2 या x – 2

- दो संख्याओं का योगफल ज्ञात हो और दोनों में से कोई एक संख्या ज्ञात हो, तब दूसरी संख्या = (दोनों संख्याओं का योग) – (ज्ञात संख्या)

- दी गई संख्या का इकाई अंक = x

  दहाई अंक = y हो तब,

  (i) संख्या = (दहाई अंक × 10) + इकाई अंक

  = 10y + x

  (ii) अंको का क्रम बदलने पर

संख्या = (इकाई अंक × 10) + दहाई अंक

$= 10x + y$

विषय संबंधित महत्वपूर्ण प्रश्न :–

आदर्श हल :–

दो अंकों की संख्या के अंको का योग 9 है इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात करो

हल :– माना संख्या का इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है

प्रथम भार्तानुसार अंकों का योग 9 है अतः

$x + y = 9$ – (1) 1 अंक

संख्या

दहाई	इकाई
y	x

अतः संख्या = दहाई का अंक × 10 + इकाई का अंक × 1

$= 10y + x$

संख्या का 9 गुना $= 9(10y + x)$

अंक पलटने पर बनी नयी संख्या

दहाई	इकाई
X	y

10 × दहाई का अंक + 1 × इकाई का अंक

$= 10x + y$

$= 10x + y$

नयी संख्या का दो गुना $= 2(10x + y)$

शर्तानुसार $9(10y + x) = 2(10x + y)$ अंक 1

$\Rightarrow \quad 90y + 9x = 20x + y$

$90y - 2y = 20x - 9y$

$88y = 11x$

11 से भाग देने पर

$8y = x$

अतः $x = 8y$ अंक 1

x का मान समी. (1) में रखने पर

जो कि $x + y = 9$ है

$8y + y = 9$

$9y = 9$

$y = 1$

अत : $x + y = 9$ द्वारा

$x + 1 = 9$

$x = 9 - 1$

$x = 8$

अतः संख्या

दहाई	इकाई
1	8

18 होगी। उत्तर

पुनरावृत्ति/अभ्यास प्रश्न

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

प्रश्न 1.सही विकल्प चुनकर उत्तर लिखो –

(i) समीकरण निकाय $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ तथा $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ के अनंत हल होने की भार्त है :–

(a) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(c) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (d) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(ii) यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होता तो वह निकाय कहलाता :–

(a) संगत निकाय (b) असंगत निकाय

(c) दोनों (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) यदि सरल रेखाएँ समान्तर होती हैं तो उनके हल होते हैं

(a) एक (b) दो (c) कोई हल नहीं (d) इनमें से कोई नहीं

(iv) दो प्रतिच्छेदी रेखाओं के हल होते हैं

(a) एक (b) दो (c) कोई हल नहीं (d) अनंत

(v) यदि समीकरण निकाय के अनंत हल हों तो रेखाएँ कहलाती हैं

(a) समान्तर (b) लंबवत् (c) प्रतिच्छेदी (d) संपाती

1. किराए पर पुस्तक देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए 27 रू. अदा किये जबकि सूसी ने एक पुस्तक 5 दिनों तक रखने के 21 रू. अदा किए। नियत किराया एवं प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

2. यश ने एक टेस्ट में 50 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते यदि प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक काटा जाता तो य ा को 40 अंक मिलते टेस्ट में कितने प्रश्न थे।

3. यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती हैं। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए तो वह 5/6 हो जाती हैं। भिन्न ज्ञात कीजिए।

4. 2 किलो सेब तथा 1 किलो अंगूर की कीमत एक दिन 160 रू. थी। एक महीने बाद 4 किलो सेब तथा 2 किलो अंगूर की कीमत 300 रू. हो गई इस स्थिति को बीज गणितीय एवं ज्यामितीय विधि द्वारा समझाइये।

5. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि युग्म संगत है अथवा असंगत यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल कीजिए

   (i) $3x + 2y = 5$

   (ii) $2x - 3y = 7$

6. दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

7. विलोपन विधि का प्रयोग करके, निम्न रैखिक समीकरण युग्म के सभी संभव हल ज्ञात कीजिए

   $2x + 3y = 8$

   $4x + 6y = 7$

8. पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी दस वर्ष प चात, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है?

9. दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी संख्याएँ कितनी हैं।

10. k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$kx + 3y - (k-3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

कार्यपत्रक I

एक वाक्य/शब्द में उत्तर लिखो

(i) $3x + y = 9$ के कोई दो हल लिखिए।

(ii) $y = 3x + 5$ के कितने हल संभव हैं।

(iii) $2x + y = k$ में यदि $x = 2, y = 1$ हो तो k का मान ज्ञात करो।

(iv) $2x + 19 = 0$ को दो चर के समीकरण के रूप में व्यक्त करो।

(v) x अंक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण लिखो

प्रश्न 1. $3x + 6 = 0$ का आरेख खींचिए।

प्रश्न 2. यदि 25 रू. में 4 पेंसिल खरीदने के बाद 1 रू. राशि शेष बचती है तो पैंसिल की संख्या ज्ञात करने हेतु समीकरण बनाइये इसका हल आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए

प्रश्न 3. 6 रू. प्रति पेन तथा 8 रू. की प्रति कॉपी के हिसाब से 100 रू. में खरीदी गयी वस्तुओं को समीकरण द्वारा प्रदर्शित करो।

प्रश्न 4. $y = 2x + 4$ के कोई 4 संभव हल लिखिए।

प्रश्न 5. बिंदु (2,14) से होकर जाने वाली दो रेखाओं के समीकरण लिखो। इस प्रकार की और कितनी रेखाएं हो सकती हैं, और क्यों?

कार्यपत्रक II

प्र1.रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) यदि समीकरण निकाय $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ तथा $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो तो निकाय के _____ हल होंगे।

(ii) यदि समीकरण निकाय $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ तथा $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ के लिए हो तो निकाय द्वारा प्रदर्शित रेखाएँ परस्पर _____ होंगी ।

(iii) यदि समीकरण निकाय $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ तथा $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ में कोई हल न हो तो भार्त होगी _____

(iv) दो अंकों की संख्या इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है तो संख्या होगी _____

(v) यदि मोटर वोट की स्थिर जल में चाल x तथा धारा की चाल y हो तो धारा के प्रतिकूल मोटर वोट की चाल _____ होगी।

प्र० 1. आफताब अपनी पुत्री से कहता है, सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा। इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त करो।

प्र० 2. एक आयताकार बाग, जिसकी लंबाई, चौड़ाई से अधिक है, का अर्ध परिमाप 36m है। बाग की विमाएँ ज्ञात करो।

प्र० 3. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे m का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

प्र० 4. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है, इस संख्या का 9 गुना संख्या के अंक पलटने से बनी संख्या के बदलने से बनी संख्या का दो गुना है, वह संख्या ज्ञात करो।

प्र० 5. निम्न रैखिक युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

$$x + y = 14$$
$$x - y = 4$$

प्र० 6. पाँच वर्ष बाद जेकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जेकब की आयु उसके पुत्र की आयु की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है।

प्र० 7. यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दे तो भिन्न 1 हो जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?

प्र० 8. k के किस मान के लिए, निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं होता

$$3x + y = 1$$
$$(2k - 1)x + (k-1)y = 2k + 1$$

प्र० 9. p के किन मानों के लिए, निम्न समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

प्र० 10. निम्न समीकरणों के युग्मों को प्रतिस्थापन विधि से हल करो

$$2x + y = 5$$
$$3x + 2y = 8$$

अध्याय–4

द्विघात समीकरण

शिक्षकों के लिए निर्देश :

1. इस अध्याय हेतु कुल 6 अंक आवंटित है :

    1. अंक – – 2 प्रश्न
    4 अंक – – 1 प्रश्न

2. द्विघात समीकरण तथा इनको हल करने की विभिन्न विधियों से बच्चो को अवगत कराएं।
3. शिक्षक व्याख्यान विधि , प्रदर्शन विधि , आगमन विधि एवं निगमन विधि का उपयोग कर सकते है ।

उद्देश्य :

1. छात्र द्विघात समीकरण की अवधारणा से परिचित हो सकेंगे।
2. छात्र द्विघात समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियों को जान सकेंगे ।
3. दैनिक जीवन में द्विघात समीकरण की उपयोगिता को जान सकेंगे।

प्रस्तावना :

- आपने विभिन्न प्रकार के बहुपदों (एक पदीय, द्विपदीय.....) का अध्ययन किया है ।

  $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ एक द्विघात बहुपद है। यदि इस बहुपद को शून्य के बराबर कर दिया जाये तो एक द्विघात समीकरण प्राप्त हो जाती है द्विघात समीकरण का उपयोग वास्तविक जीवन से संबधित कई समस्याओं को हल करने में होता है; उदाहरणार्थ , मान लीजिए कि हमें एक आयताकार बगीचा बनाना है जिसका कुल क्षेत्रफल 408 वर्ग इकाई है। यदि बगीचे की लम्बाई उसकी चौड़ाई के तीन गुने से 2 इकाई अधिक है, तो बगीचे की लम्बाई और चौड़ाई क्या होनी चाहिए ?

  माना बगीचे की चौड़ाई x मीटर है । तब , उसकी लम्बाई (3x + 2) मीटर होनी चाहिए। तब बगीचे का क्षेत्रफल = 408

  $\Rightarrow (3x + 2)x = 408$

  $\Rightarrow 3x^2 + 2x = 408$

  अतः $3x^2 + 2x - 408 = 0$

  इसलिए , बगीचे की चौड़ाई , समीकरण $3x^2 + 2x - 408 = 0$, जो एक द्विघात समीकरण है, को संतुष्ट करना चाहिए।

  इस अध्याय में , हम द्विघात समीकरणों और उनके हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

विषयवस्तु प्रस्तुतिकरण – 1

गतिविधि – 1

द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

आप जानते हैं कि चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में होती है , जहां a, b, c वास्तविक संख्याएँ है तथा $a \neq 0$ है ।

उदाहरण के लिए, $3x^2 + x - 30 = 0$, एक द्विघात समीकरण है ।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि : कोई भी समीकरण $p(x) = 0$, जहॉ $p(x)$, घात 2 का एक बहुपद है, एक द्विघात समीकरण कहलाती है।

यदि समीकरण $p(x) = 0$, जहॉ $p(x)$, घात 2 का एक बहुपद है, में $p(x)$, के पद घातों के घटते क्रम में लिखे जाये तो समीकरण का मानक रूप (Standard Form) प्राप्त होता है । अर्थात $ax^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$ द्विघात समीकरण का मानक रूप (Standard Form) है।

उदाहरण : जॉच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण है या नहीं:

(i) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

हल

(i) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

$\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 - 2x$

$\Rightarrow x^3 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 2x + 8 = 0$

$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 2x + 8 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 14x - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 16x - 8 = 0$

यहॉ समीकरण की घात 3 है। अतः यह समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

पुनरावृत्ति प्रश्नः

1. जॉच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं

   $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

कक्षा कार्य :

1. जॉच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं :

   $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

गृह कार्य :

1. जॉच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं :

   $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

विषयवस्तु प्रस्तुतिकरण – 2

गतिविधि – 1

गुणनखंडो द्वारा द्विघात समीकरण का हल (Solution of a Quadratic Equation by Factorization)

हम जानते है कि यदि वास्तविक संख्या α बहुपद $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ का एक शून्यक कहलाती है , यदि $aa^2 + ba + c = 0$ हो।

इसी प्रकार से वास्तविक संख्या α समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a \propto^2 + b \propto + c = 0$ हो ।

यानि कि द्विघात बहूपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण

$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान होते हैं;

एक द्विघात बहूपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं। अतः किसी द्विघात समीकरण के भी अधिक से अधिक दो मूल हो सकते है।

उदाहरण : गुणनखंड द्वारा समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए ।

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 4x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x(2x - 3) - 2(2x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \quad \text{या} \quad x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{या} \quad x = 2$$

अतः मूल $\frac{3}{2}$ और 2 है

गतिविधि – 2

द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बनाकर हल (Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square)

समीकरण $x^2 + 4x - 12 = 0$ पर विचार करते हैं। $x^2 + 4x - 12 = 0$ को हल करना $(x + 2)^2 - 16 = 0$ को हल करने के तुल्य हैं । अब मूल आसानी से प्राप्त कर सकते है;

प्रक्रिया निम्न प्रकार से है–

$$x^2 + 4x - 12 = x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 12$$

$= x^2 + 4x + 2^2 - 4 - 12$
$= (x+2)^2 - 16$

इस प्रकार , $x^2 + 4x - 12 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाकर $(x+2)^2 - 16 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसे पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से जाना जाता है।

$(x+2)^2 - 16 = 0$ को $(x+2)^2 = 16$ के रूप में लिख सकते हैं; वर्गमूल लेने पर, हम $x + 2 = 4$ या $x + 2 = -4$ पाते है।

इसलिए $x = 2$ या $x = -6$

अतः $x^2 + 14x - 12 = 0$ के मूल 2 और –6

अब हम द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \quad 0$ पर विचार करते है। इस समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से व्यापक रूप देते है।

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ यदि $b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

अतः $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं, यदि

$b^2 - 4ac \geq 0$ है।

द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के इस सूत्र (Quadratic Formula) को द्विघाती सूत्र या श्रीधराचार्य सूत्र (Shreedharacharya Formula) कहते है।

उदाहरण : द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 4 = 0$ के मूल सूत्र विधि से ज्ञात कीजिए ।

हलः $2x^2 + x - 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 2, b = 1, c = -4$

सूत्र विधि से

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4},\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$$

निर्देश : शिक्षक छात्रों से गुणनखंड विधि एवं पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से द्विघात समीकरणों को हल करने **का अभ्यास कराएं। इसके उपरांत सूत्र विधि के प्रयोग से भी द्विघात समीकरणों को हल करना सिखाएँ।**

पुनरावृत्ति प्रश्नः

1. गुणनखंड विधि से समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए।

कक्षा कार्य :

1. गुणनखंड विधि से समीकरण $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ को हल कीजिए।
2. यदि द्विघात समीकरण $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

गृह कार्य :

1. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल सूत्र विधि से ज्ञात कीजिए।
2. समीकरण $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4,7$ के मूल ज्ञात कीजिए।

विषयवस्तु प्रस्तुतिकरण – 3

गतिविधि –1

मूलो की प्रकृति (Nature of the Roots)

हम यह देख चुके है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ होते हैं। यहॉ $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि समीकरण के मूल वास्तविक है या नहीं ।

$b^2 - 4ac$ को समीकरण का विविक्तकर (Discimination) कहते है। तथा इसे D से निरूपित करते है। अर्थात $D = b^2 - 4ac$

यदि $D = b^2 - 4ac > 0$ है, तो हमें द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल सूत्र

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ से $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ या $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ प्राप्त होगे।

यदि $D = b^2 - 4ac = 0$ है तो हमें द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{-b \pm 0}{2a}$ अर्थात $x = \frac{-b}{2a}$ या $x = \frac{-b}{2a}$ प्राप्त होगे।

और यदि $D = b^2 - 4ac < 0$ हैं तो हमें द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के कोई वास्तविक मूल प्राप्त नही होंगे क्योंकि तब ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं होगी जिसका वर्ग $b^2 - 4ac$ हो।

अर्थात द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के

1. दो भिन्न वास्तविक मूल होते है , यदि $D = b^2 - 4ac > 0$ हो ।
2. दो बराबर वास्तविक मूल होते है , यदि $D = b^2 - 4ac = 0$ हो ।
3. कोई वास्तविक मूल नहीं होता है , यदि $D = b^2 - 4ac < 0$ हो ।

उदाहरण : द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 2, b = -3, c = 5$

विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$ अतः समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं है।

पुनरावृत्ति प्रश्नः

1. द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए ।

कक्षा कार्य :

1. द्विघात समीकरण $kx(x-2) + 6 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण के दो बराबर मूल हो।

गृह कार्य :

1. द्विघात समीकरण $kx(x-2) + 6 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण के दो बराबर मूल हो।

स्मरणीय बिन्दु

- चर में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में होती है, जहॉ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है।

- कोई भी समीकरण $p(x) = 0$ जहॉ $p(x)$ घात 2 का एक बहुपद है, एक द्विघात समीकरण कहलाती है।
- यदि समीकरण $p(x) = 0$,जहॉ $p(x)$,घात 2 का एक बहुपद है, में $p(x)$के पद घाती के घटते क्रम में लिखे जाये तो समीकरण का मानक रूप $(Standard\ Form)$ प्राप्त होता है।

  अर्थात $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ द्विघात समीकरण का मानक रूप $(Standard\ Form)$ है।
- वास्तविक संख्या α समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $\alpha\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।
- किसी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो मूल हो सकते है।
- द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$के

  (iv) दो भिन्न वास्तविक मूल होते है , यदि $D = b^2 - 4ac > 0$ हो ।
  (v) दो बराबर वास्तविक मूल होते है , यदि $D = b^2 - 4ac = 0$ हो।
  (vi) कोई वास्तविक मूल नही होता है , यदि $D = b^2 - 4ac < 0$ हो

कार्य पत्रक द्विघात समीकरण

1. अंक वाले प्रश्न

Q1. सही विकल्प चुनिये।

1. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान हो तो समीकरण के विविक्तकर का मान होगा ।

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
2. द्विघात समीकरण $3x^2 + 4x + 7 = 0$ के मूलों का योगफल होगा ।

   (a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $\frac{7}{3}$ (d) $-\frac{7}{3}$
3. समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ के मूलों की प्रकृति होगी

   (a) परिमेय (b) अपरिमेय (c) समान (d) काल्पनिक
4. किसी द्विघात समीकरण में चर की अधिकतम घात होती है।

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर होगा।

   (a) $D = b^2 - 4ac$ (b)$D = 4ac - b^2$ (c) $D = b^2 - 4ac$ (d)$D = 4ac - b^3$
6. द्विघात समीकरण $4x^2 + 8x - 3 = 0$ के मूलों का योगफल होगा ।

   (a) -2 (b) 2 (c) $\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{3}{4}$
7. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$के मूलों का योगफल होगा ।

   (a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{c}{a}$
8. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$के मूलों का गुणनफल होगा ।

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{c}{a}$

9. निम्नलिखित में से किस द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे।

(a) $x^2 + 9x + 4 = 0$ (b) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(c) $x^2 + x + 2 = 0$ (d) $x^2 + 5x + 8 = 0$

10. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ के मूल होगें ।

(a) $\frac{3}{2}, 2$ (b) $-\frac{3}{2}, -2$ (c) $-\frac{3}{2}, 2$ (d) $\frac{3}{2}, -2$

Q2. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये।

1. एक समीकरण $p(x) = 0$, जहॉ $p(x)$ घात 2 का बहुपद हो, ...कहलाती है।
2. किसी द्विघात समीकरण के अधिकतम ..... मूल होते है।
3. समीकरण $(x - 3)(x + 4) = 0$ के मूल .....है।
4. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक और समान हो तो उस समीकरण के विविक्तकर का मान .....होगा ।
5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर का सूत्र है $D =$.....

Q3. सत्य /असत्य लिखिए :

1. एक द्विघात समीकरण के एक से अधिक मूल हो सकते है।
2. समीकरण $x(x - 1) = 0$ में x के मान 0 और 1 होगे।
3. समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूल समान होगे।
4. समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल समान होंगे।
5. $ax + b = 0$ एक द्विघात समीकरण है।

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए :

1. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में मान $b^2 - 4ac$ क्या कहलाता है।
2. यदि किसी द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक एवं समान हों तो उस समीकरण के विविक्तकर का मान कितना होगा ।
3. यदि किसी द्विघात समीकरण के विविक्तकर का मान ऋणात्मक हो तो उस समीकरण के मूलों की प्रकृति कैसी होगी।
4. यदि किसी द्विघात समीकरण के विविक्तकर का मान धनात्मक हो तो उस समीकरण के मूलों की प्रकृति कैसी होगी ।
5. द्विघात समीकरण $2x^2 + 4x + 5 = 0$ के मूलों का योगफल कितना होगा ।

5. अंक वाले प्रश्न :

Q5. जॉच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं :

$(i)\ (x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$ $\quad (ii)\ x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^2$

Q6. गुणनखंड विधि से समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए।

Q7. गुणनखंड विधि से समीकरण $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ को हल कीजिए।

Q8. यदि द्विघात समीकरण $4x^2 + 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

Q9. यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + x + 4 = 0$ के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिऐ।

Q10. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल सूत्र विधि से ज्ञात कीजिए।

Q11. द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 4 = 0$ के मूल सूत्र विधि से ज्ञात कीजिए।

Q12. समीकरण $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4,7$ के मूल ज्ञात कीजिए।

Q13. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए । यदि मूलों का अस्तित्व होतो उन्हें ज्ञात कीजिए।

Q14. द्विघात समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए । यदि मूलों का अस्तित्व होतो उन्हें ज्ञात कीजिए।

Q15. द्विघात समीकरण $kx(x-2) + 6 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण के दो बराबर मूल हो ।

टेस्ट पेपर (दो चरो वाला रैखिक समीकरण और द्विघात समीकरण)

20 अंक

प्र.1) जोड़ी मिलाइए :– (1x5=5)

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	a. मूल वास्तविक होते है।
(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	b. प्रतिच्छेदी रेखाएँ
(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	c. मूल वास्तविक नही होते है।
(iv) $b^2 - 4ac \geq 0$	d. सम्पाती रेखाएँ
(v) $b^2 - 4ac < 0$	e. समान्तर रेखाएँ

प्र.2) प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए :– (3)

$$s - t = 3, \frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6,$$

प्र.3) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए। (4)

प्र.4) सूत्र का प्रयोग करके $\boldsymbol{x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0}$ को हल कीजिए। (4)

प्र.5) निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में **k** का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हो (4)

i. $2x^2 + kx + 3 = 0$

ii. $, kx(x - 2) + 6 = 0,$

अध्याय–5

समान्तर श्रेणी

शिक्षकों के लिए निर्देश :

इकाई पर आवंटित अंक = 7

1 अंक वाले प्रश्न = 2 x 1 = 2

5 अंक वाले प्रश्न = 5 x 1 = 5

कुल अंक = 7

1. माड्यूल में दी गई गति विधियों द्वारा अवधारणा की समझ विकसित की जाए।

2. विभिन्न पहाड़ों की सहायता से एवं अलग–अलग पेर्टन की अनुक्रम बनाकर चर्चा द्वारा यह तय किया जाए कि विद्यार्थियों को समान्तर श्रेणी (d= समान अंतर) पहचानना तथा ज्ञात करना आ जाए (कार्य पत्रक I की सहायता से)

3. समान्तर श्रेणी का n वॉ पद ज्ञात करने हेतु प्रथम पद में d जोड़कर (उदाः $a, a+d,\ a+d+d,\ a+d+d+d, \ldots\ldots\ldots\ldots$ द्वारा $a_n = a+(n-1)d$ को समझाया जाए।

4. समान्तर श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करने के लिए सूत्र $Sn = \frac{n}{2}[2a+(n-l)d]$ तथा $Sn = \frac{n}{2}[a+l]$ में कब किस सूत्र को प्रयोग करेगें स्पष्ट किया जाए।

5. कक्षा कार्य को माडयूल में दिए आदर्श उत्तर के आधार पर अंकों के विभाजन द्वारा बताया जाए।

6. कक्षा कार्य के दौरान छात्रों की गल्तियों को सुधार करवाया जाये ।

7. गृहकार्य का मूल्याकंन गंभीरता से करके गल्तियों को चिन्हित कर उनका सूधार करवाकर अभ्यास कराया जाए।

8. विषयवस्तु को आगमन एवं निगमन विधि द्वारा समझाया जाए।

उद्देश्य : इस अध्याय के द्वारा विद्यार्थी सामान्य जोड़ घटाने आदि की प्रक्रिया द्वारा पदों का निर्माण अर्थात n वाँ पद ज्ञात करना सीखेंगे।

रोचक तरीकों से बिना लंबे योग किए सूत्रों के माध्यम से विभिन्न पेटर्न वाली संख्याओं का योग कर सकेंगे।

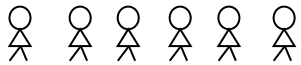
दैनिक जीवन में आने वाली समस्याओं जैसे निश्चित रूप से घटती या बढती हुई सीढ़ी बनाने में कितना पटिया लगेगा, समान प्रकार से बढ़ती हुई तनख्वाह में किसी विशेष माह में मिलने वाली तनख्वाह ज्ञात करना या कुल तनख्वाह ज्ञात करना आदि को समझ सकेगे।

प्रस्तावनाः गतिविधि एवं II तथा कार्यपत्रक I के द्वारा छात्रों को पूर्वज्ञान से जोड़कर समान्तर श्रेणी की अवधारणा को विकसित किया जाए।

गतिविधि – 1

कक्षा में छात्र /छात्राओं को ताली वाला खेल खेलने को कहेगे। जिसमें एक छात्र ताली बजाएगा, दूसरा नहीं बजाएगा, तीसरा बजाएगा, चौथा नहीं बजाएगा तो उनसे पुछेगे कि 10 वे नम्बर का छात्र बजाएगा या नहीं बजाएगा। बच्चे उत्तर दे देगे तो उनसे पूछेगे कि कैसे पता लगाया वह बता देगा।

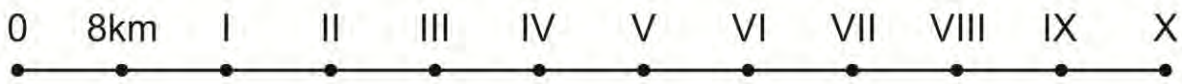
इसी खेल को दो–दो ,तीन–तीन के बाद खिलाकर हम छात्र/छात्रा को अनुक्रम (पेर्टन) से अवगत करा कर उसे समझा सकते है।



गतिविधि –2

बच्चों के साथ ग्राउड में खेल खेला जाए। उन्हें पंक्ति में खड़ा करके एक निश्चित स्थान पर आलू/पत्थर रख दिए जाए और शुरू में दूरी 8 मी. चलने के बाद हर तीन मी. पर आलू । पत्थर रखे है तो 5वे. नं. के आलू पर पहुंचने में वह कितने मी. चला या शुरू से लेकर 10 वे आलू तक पहुँचने में उसे कितने मी. चलना होगा ।

8+3 11+3 14+3 17+3 21



समान्तर श्रेणी

प्रस्तुतीकरण

ऐसे अनुक्रम जिनमें दो लगातार पदों का अंतर समान हो ऐसे अनुक्रम को समांतर श्रेणी कहते है।

उदाहरण

1. 1,2,3,4,.....
2. 2,4,6,8,.....
3. 15,17,19,21,.....
4. 6, 4, 2, 0, –2,.....

सार्वअन्तर (d) समांतर श्रेणी के दो लगातार पदो के अंतर को सार्वअन्तर (common difference) कहते है। इसे अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर " d " से प्रदर्शित किया जाता है।

इसी प्रकार समांतर श्रेणी के प्रथम पद को अंग्रेजी वर्णमाला के Small letter "a" द्वारा दर्शाया जाता है।

समांतर श्रेणी के कुछ पदों की संख्या को अंग्रेजी वर्णमाला के Small letter "n" द्वारा दर्शाया जाता है।

उपरोक्त उदाः 1 में सार्वअंतर $'d' = T_2 - T_1 = 2 - 1$

उदा. 2 में सार्वअंतर $d = T_2 - T_1 = 4 - 2 = 2$

उदा. 3 में सार्वअंतर $d = T_2 - T_1 = 17 - 15 = 2$

उदा. 4 में सार्वअंतर $d = T_2 - T_1 = 4 - 6 = -2$

इस प्रकार सार्वअंतर धनात्मक संख्या भी हो सकती है ओर ऋणात्मक संख्या भी हो सकती है , अब हम निम्न अनुक्रम पर विचार करते है।

1,1,1,1.....

क्या यह एक समांतर श्रेणी है ?
हॉ , क्योंकि सार्वअंतर धनात्मक संख्या, ऋणात्मक संख्या तथा शून्य भी हो सकती है।
समान्तर श्रेणी का n वॉ पद ज्ञात करना :–
समान्तर श्रेणी का प्रथम पद $= a$

द्वितीय पद $= a + d$

तृतीय पद $= a + 2d$

चतुर्थ पद $= a + 3d$

श्रेणी का 100 वॉ पद $= a + 99d$

श्रेणी का n वॉ पद $= a + (n - 1)d$

इस प्रकार समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप (General Form) निम्न प्रकार से होता है।

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots \dots \dots a + (n - 1)d$

इस तरह श्रेणी का n वॉ पद $a + (n - 1)d$ श्रेणी का अंतिम पद भी हो सकता है। जिसे अंग्रेजी वर्णमाला l अथवा a_n से प्रदर्शित किया जाता है। ऐसी श्रेणी को परिमित श्रेणी कहते है।

समान्तर श्रेणी को समझाने के लिये मुख्यतः ड्राईंग शीट, केची एवं स्केच पेन की आवश्यकता होती है।

प्रस्तावना :

प्रश्न – 1. समान्तर श्रेणी में इन प्रश्नों द्वारा पद ज्ञात करना तथा विभिन्न पदों में संबंध बताने का प्रयास किया जाता है। किसी समांतर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है तो

(a) श्रेणी का 7 वॉ पद क्या होगा

सूत्र $a_n = a + (n - 1)d$ के अनुसार

$a_7 = a + (7 - 1)d$

$= a + 6d$

(b) श्रेणी का 25 वॉ पद क्या होगा

$a_{25} = a + (25 - 1)d$

$= a + 24d$

(c) श्रेणी का 17 वॉ पद क्या होगा

$a_{17} = a + (17 - 1)d$

$= a + 16d$

(d) श्रेणी का p वॉ पद क्या होगा

$a_p = a + (p - 1)d$

(e) श्रेणी का 12 वॉ पद , 6 वॉ पद का दुगुना है।

श्रेणी का 12 वॉ पद $= a + 11d$

श्रेणी का 6 वॉ पद $= a + 5d$

चूंकि 12 वॉ पद $= 2 \times 6$ वॉ पद

अतः $a + 11d = 2\,(a + 5d)$

(f) समान्त श्रेणी का आठवॉ पद , तीसरे पद से 12 अधिक है।

समान्त श्रेणी का आठवॉ पद $= a + 7d$

समान्त श्रेणी का तीसरा पद $= a + 2d$

समान्त श्रेणी का आठवॉ पद $=$ तीसरा पद $+ 12$

$a + 7d = a + 2d + 12$

आदर्श हलः–

प्र.1. श्रेणी 2,4,6,.....का 7 वॉ पद ज्ञात करो।

हलः दी गई समान्तर श्रेणी में

दिया है $a =$ प्रथम पद $= 2$

$d =$सार्वन्तर $=$ द्वितीय पद $-$ प्रथम पद $= 4 - 2 \quad = 2$

n वॉ पद $=$ अर्थात $n = 7$ 1 अंक

(7 वॉ पद)

सूत्र $a_n = a + (n - 1)d$ 1 अंक

$a_7 = 2 + (7 - 1) \times 2$ 1 अंक

$a_7 = 2 + 6 \times 2$

$a_7 = 2 + 12$

$a_7 = 14$ 1 अंक

प्र. 2. समान्तर श्रेणी 7,13,19,.....205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः प्रथम पद $a = 7$

सार्वन्तर $d =$ द्वितीय पद $-$ प्रथम पद

$= 13 - 7$

$= 6$

अंतिम पद या n वॉ पद $= a_n = 205$

ज्ञात करना है पदों की संख्या $n =$? .....1 अंक

सूत्र

$a_n = a + (n-1)d$ .....1 अंक

या $205 = 7 + (n-1)6$ .....1 अंक

या $205 - 7 = (n-1)6$

या $198 = (n-1)6$

या $\frac{198}{6} = n - 1$

या $33 = n - 1$

या $n = 34$ .....1 अंक

कक्षा कार्य

प्र.3. निम्नलिखित सारणी में , रिक्तस्थानों को भरिए जहॉ $A.P$ का प्रथम पद a ,सर्वान्तर d और n वॉ पद a_n है।

समान्तर श्रेणी का	a	d	n	a_n
	7	3	8	–
	–18	–	10	0
	35	0	105	–

प्र.4. निम्नलिखित समान्तर श्रेणियों में, रिक्त स्थानों के पदों को ज्ञात कीजिए।

(i) 2, ☐ , 26

(ii) ☐ , 13, ☐ , 3

(iii) 5, $\square$, $\square$,$9\frac{1}{2}$

आदर्श हल

प्र. 5. उस समान्तर श्रेणी का 31 वॉ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11 वॉ पद 38 है और 16वॉ पद 73 है।

हलः समान्तर श्रेणी का n वॉ पद

$$a_n = a + (n-1)d$$

जहॉ $a =$ प्रथम पद

$n =$ पदों की संख्या

$d =$ सार्वन्तर .....1 अंक

प्रथम शर्तानुसार 11 वॉ पद $= 38$

अतः $n = 11$ और $a_n = 38$ होगा

$a + (11-1)d = 38$

$a + 10d = 38$ ..... (I)

द्वितीय शर्तानुसार 16 वॉ पद $= 73$ है।

$n = 16$ और $a_n = 73$

$a + (16-1)d = 73$

$a + 15d = 73 \qquad (II)$ .....1 अंक

$a + 10d = 38$

$\underline{- \; a \pm 15d = \underline{7}3}$

$-5d = -35$

$d = 7$

समीकरण (I) में $d = 7$ रखने पर

$a + 10d = 38$

$a + 10 \times 7 = 38$

$a + 70 = 38$

$a = 38 - 70$ .....1 अंक

$a = -32$

अतः श्रेणी का 31 वाँ पद

$T_{31} = a + (31-1)d$

$= -32 + 30 \times 7$

$= -32 + 210$

$= 178$ .....1 अंक

समान्तर श्रेणियॉ

गृहकार्य

प्र.1. समान्तर श्रेणी $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$ के लिए प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d लिखिए ।

प्र.2. समान्तर श्रेणी 2,4,6,8,10,12 .....के लिए प्रथम पद तथा सार्वअंतर d लिखिए ।

प्र.3. 100,70,40,10,.....के लिए प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d लिखिए।

प्र.4. किसी स्कूल की प्रातः कालीन सभा में एक पक्ति में खड़े विद्यार्थियों की उचाई निम्न है। (cmमें)

147,148,149,.....157

प्रथम पद सार्वअंतर तथा अंतिम पद लिखिए ।

प्र.5. AP के प्रथम चार पद लिखो।

(i) $a = 10 \quad d = 10$

(ii) $a = -1 \quad d = 1/2$

(iii) $a = 4 \quad d = -3$

(iv) $a = -2 \quad d = 0$

प्र.6. निम्न में कौन AP है।

1. $2,4,8,16, \ldots \ldots ..$
2. $2, \frac{5}{2},\ 3, 7/2$
3. $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2} \ldots \ldots \ldots,$
4. $a, a^2, a^3, a^4 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
5. $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
6. $a, 2a, 3a, 4a, \ldots \ldots \ldots \ldots ..$
7. $-10, -6, -2, 2 \ldots \ldots \ldots \ldots ..$
8. $1.3, 9, 27, \ldots \ldots \ldots \ldots$

पाठ योजना क्र.–2

समान्तर श्रेणी के n पदो का योग

दी गई समान्तर श्रेणी

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots \ldots \ldots a + (n-2)d + a + (n-1)d \,..(I)$$

S को पुनः अंतिम पद की ओर से शुरू करते हुए लिखेंगे।

$S = a + (n-1)d + a + (n-2)d + \ldots\ldots\ldots\ldots a + d$
$+ a \qquad ..(II)$

(I) तथा (II) को जोड़ने पर

$2S = [a + a + (n-1)d] + [a + d + a + (n-2)d] + \ldots.$

$+ [a + (n-2)\, d + a + d] + [a + (n-1)d + a]$

$2S = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + ----[2a + (n-1)\, d] + [2a + (n-1)d] \quad ..n$ पदों तक

अतः $2S = n \times [2a + (n-1)d$

अथवा $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ सूत्र $..(I)$

अथवा$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$ $S = \frac{n}{2}[a + a_n]$

जहाँ $a_n = a + (n-1)d$ होगा ।

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n] = \frac{n}{2}[a + l]$$

विशेष : किस स्थिति में कौन सा सूत्र प्रयुक्त होगा स्पष्ट किया जाए यदि a, n, d दिया गया है तो $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$सूत्र (II) का प्रयोग किया जाए

अन्यथा यदि a_n, a, n दिया है तो $S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$ सूत्र का प्रयोग किया जाए।

निम्नलिखित का योग ज्ञात करो।

1. प्रथम 1000 धन पूर्णाक

हलः माना $s = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots..+1000$ 1 अंक

सूत्र $s_n = \frac{n}{2}(a + l)$ 1 अंक

अतः $s_{1000} = \frac{1000}{2}[1 + 1000] = 500 \times 1001$ 1 अंक

$= 500500$ 1 अंक

अतः प्रथम 1000 घनपूर्णाकों का योग 500500 है।

(2) संख्याओं की उस सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात करों जिसका nवॉ पद $a_n = 3 + 2n$ है।

हलः $a_n = 3 + 2n$

$a = 1$ रखने पर

$a_1 = 3 + 2(1) = 5$

$a_2 = 3 + 2(2) = 3 + 4 = 7$

$a_3 = 3 + 2(3) = 3 + 6 = 9$ 1 अंक

$\therefore AP = 5,7,9 \ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{aligned} d &= 7 - 5 = 2 \\ d &= 9 - 7 = 2 \\ d &= 11 - 9 = 2 \end{aligned}\right\}$$ 1 अंक

$\therefore d = 2$

अतः $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d$ 1 अंक

$$= \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2) = 12[10 + 46] = 672$$

दी गई संख्याओं की सूचि के प्रथम 24 पदों का योग 672 है।

आदर्श हल

लिखने का अभ्यास

प्र.3. प्रथम 40 धनपूर्णाकों का योग ज्ञात करो, जो कि 6 से विभाज्य है।

हलः 6 से विभाज्य प्रथम 40 घन पूर्णाक $= 6,12,18, \ldots\ldots..$

प्रथम पद $a = 6$

सार्वान्तर $d = 6$ 1 अंक

$\therefore n$ पदो का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ 1 अंक

$S_{40} = \frac{40}{2}[2 \times 6 + (40 - 1)6]$ 1 अंक

$= 20[12 + 39 \times 6]$

$= 20[12 + 234]$

$= 20 \times 246$

$= 4920$ 1 अंक

प्र.4. 8 के प्रथम 15 गुणज का योग ज्ञात करो।

हलः 8 के प्रथम 15 गुणन $= 8 \times 1, 8 \times 2, 8 \times 3, \ldots\ldots$

अर्थात 8, 16, 24,.....120 $in\ AP$ 1 अंक

$a = 8$, अंतिम पद $l = 120, n = 15$ 1 अंक

n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$= \frac{15}{2}[8 + 120]$

$= \frac{15}{2} \times 128 = 15 \times 64 = 960$ 1 अंक

कक्षा कार्य–

प्र. 1. $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$ है तब a तथा n ज्ञात करो।

प्र. 2. किसी AP का प्रथम पद 5 अंतिम पद 45 और योग 400 है पदों की संख्या तथा सार्वअंतर ज्ञात कीजिए।

प्र.3. AP के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात करें जिसमें $d = 7$ और 22 वॉ पद 149 है।

प्र.4. यदि किसी AP के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात करो।

प्र.5. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात करे।

कार्यपत्रक – 1

वस्तुनिष्ठ

प्रश्न :– सत्य/असत्य बताइए।

(i) 0.2,0.22,0.222..... समान्तर श्रेणी है।
(ii) -10,-6,-2,2, का सार्वन्तर 4 है।
(iii) यदि a=10, तथा d=10, तो समान्तर श्रेणी के प्रथम तीन पद 10,20,30 होगे।
(iv) $1^2, 3^2, 5^2$ एक समान्तर श्रेणी है।
(v) a, a^2, a^3,.....एक समान्तर श्रेणी नहीं है।
(vi) 1,1,1,1 एक समान्तर श्रेणी नहीं है।
(vii) समान्तर श्रेणी के दो क्रमागत पदों में निश्चित अंतर होता है।
(viii) यदि समान्तर श्रेणी में पदों की संख्या परिमित है तो उसे परिमित समान्तर श्रेणी कहते है।
(ix) समान्तर श्रेणी के सार्वन्तर का मान धनात्मक ,ऋणात्मक या शून्य कोई भी हो सकता है।
(x) n प्राकृत संख्याओं का योग $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ होता है।

प्रश्न 2. 8000, 8500, 9000 का अगला पद क्या होगा।

प्रश्न 3. 100,70,40,10, ...के द्वितीय पद व प्रथम पद का अंतर क्या होगा ।

प्रश्न 4. प्रथम दस विषम प्राकृत संख्याए लिखिए एवं उनका योग ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 5. 7 के प्रथम 5 गुणन लिखिए।

प्रश्न 6. 1 और 30 के बीच के 3 के गुणजों की संख्या लिखिए।

कार्य पत्रक (II)

प्र.1. AP : 21, 10, 15, . . का कौनसा पद –81 है।

प्र.2. AP : 5,11,17,23..... का 6वॉ पद ज्ञात कीजिए।

प्र.3. दो अंकों वाली कितनी संख्याए 3 से विभाज्य है?

प्र.4. AP : 10,7,4……-62 का अंतिम पद से 11वॉ पद ज्ञात कीजिए।

प्र.5. AP : 3,8,13,18……..का कौन सा पद 78 है।

प्र.6. AP : का 11 वॉ पद 38 है और 16 वॉ पद 73 है इस AP : का 31 वॉ पद ज्ञात कीजिए।

प्र.7. AP : का 17वॉ पद उसके 10 वें पद से 7 अधिक है । इस AP का सार्वान्तर ज्ञात करो।

प्र.8. तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है।

प्र.9. AP : 3,8,13,……253 में अंतिम पद से 20 वॉ पद ज्ञात करो।

प्र.10. किसी AP के प्रथम n पदों का योग S ज्ञात करने का सूत्र लिखे।

प्र.11. AP : 8,3,-2……..के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

प्र.12. AP : 2,7,12,…… के 10 पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

प्र.13. -5+(-8)+(-11) +…….+(-230) का योग ज्ञात करो।

प्र.14. 1/15, 1/12, 1/10 , ……,11 पदो तक का योग ज्ञात करे।

प्र.15. AP में a=5,d=3 और a_n=50 है। n तथा S_n ज्ञात कीजिए।

प्र.16. a_{12}=37 ,d=3 तो a और s_n ज्ञात करो।

स्मरणीय बिंदु

1. समान्तर श्रेणी का n वॉ पद
   a_n=a+(n-1)d होगा जहा
   a = समान्तर श्रेणी का प्रथम पद
   n = समान्तर श्रेणी के पदों की संख्या
   d= समान्तर श्रेणी का सार्वन्तर = [द्वितीय पद –प्रथम पद] या [तृतीय पद – द्वितीय पद]
   तथा a_n=n वॉ पद होता है।
2. समान्तर श्रेणी के n पदों का योग

   $$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

   या $S = \frac{n}{2}[a + a_n]$ होता है।
3. समान्तर श्रेणी में यदि पदों की संख्या परिमित हो तो वह परिमित समान्तर श्रेणी तथा यदि पदों की संख्या अपरिमित हो तो उसे अपरिमित समान्तर श्रेणी कहते है।
4. समान्तर श्रेणी का सार्वन्तर धनात्मक , ऋणात्मक या शून्य कुछ भी हो सकता है।

पुनरावृत्ति

प्र.1. यदि किसी समान्तर श्रेणी के तीसरे और नौवे पद क्रमशः 4 ओर –8 है तो इसका कौन सा पद शून्य होगा ।

प्र.2. समान्तर श्रेणी 3, 15,27,39,……..का कौन सा पद उसके 54 वे पद से 132 अधिक होगा ।

प्र.3. क्या समान्तर श्रेणी 11,8,5,2,……..का एक पद –150 है क्यों

प्र.4. यदि किसी सामान्तर श्रेणी का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 तथा योग 400 है । पदों की संख्या और सार्वन्तर ज्ञात कीजिए।

प्र.5. ऐसे प्रथम 40 घन पूर्णाक का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य है।

प्र.6. यदि किसी समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है तो प

(i) इसका प्रथम पद क्या है

(ii) प्रथम दो पदों का योग क्या है।

(iii) दूसरा पद क्या है।

(iv) सार्वअन्तर क्या है।

सामान्य भूलें

(i) गणना करते समय चिन्हों में की जाने वाली भूलें ।

(ii) लापरवाही द्वारा अंकों को लिखने में हुई भूलें या चिन्हों की भूलें।

(iii) सही सूत्र का चयन न कर पाना।

(iv) n वॉ पद है या पदों की संख्या है सही सही समझ न पाना।

(v) कभी कभी अंत से वॉ पद एवं प्रारंभ से प्रथम पद क्या पूछा गया है ध्यान न दे पाना।

(vi) सार्वन्तर ज्ञात करते समय होने वाली भूलें प्रथम पद से द्वितीय को घटा देना।

अध्याय–7

निर्देशांक ज्यामिति

शिक्षकों के लिए निर्देश :

यह अध्याय अपने में 06 अंक समाहित किये हुए है।

06 अंकों में 01 अंक वस्तुनिष्ठ प्रश्न पर तथा 02 व 03 अंक के एक–एक प्रश्न लघु उत्तरीय है।

विद्यार्थी निर्देशांक पद्धति से परिचित है। अतः ग्राफिकल बोर्ड पर निर्देशांकों के आधार पर बिन्दु की स्थिति, अलग–अलग निर्देशांक देकर अभ्यास करायी जावे।

कक्षा में ग्राफिकल बोर्ड आवश्यक होगा।

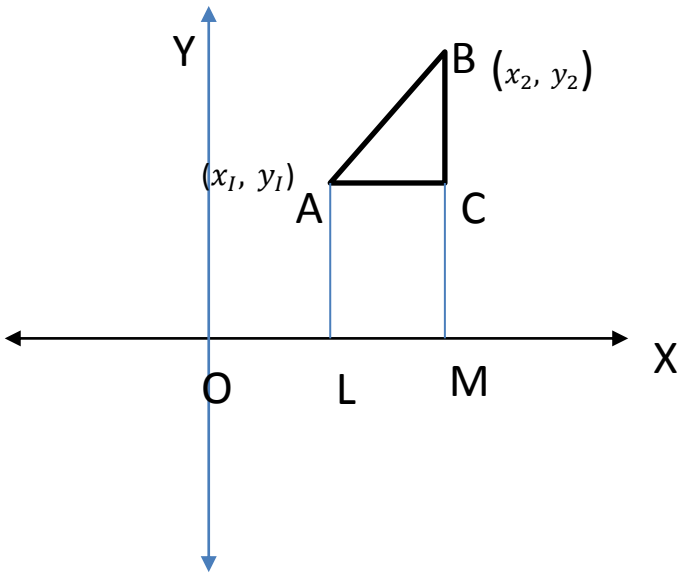
कक्षा का प्रारम्भ पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ क्रमांक 171 पर वर्णित गतिविधियों से किया जाना उचित होगा।

उद्देश्य :

1. विद्यार्थियों को दूरी के सूत्र को समझाना ।
2. दूरी के सूत्र पर आधारित प्रश्नों को हल कराना।
3. खण्ड सूत्र (विभाजन सूत्र) , त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र एवं उन पर आधारित प्रश्नों को समझाना ।

प्रस्तावना–1 :

शिक्षक निम्नानुसार चित्र (संभव हो तो ग्राफिकल बोर्ड पर) बनाकर विद्यार्थियों से प्रश्न पूछेगे।



शिक्षक प्रश्न	छात्र उत्तर (संभावित)
1. चित्र में यदि OL= x_1, AL = y_1, तो बिन्दु के निर्देशांक क्या होगें।	बिन्दु A के निर्देशांक (x_1,y_1) होंगे।
2. चित्र में यदि OM= x_2, BM = y_2, तो बिन्दु B के निर्देशांक क्या होगे।	बिन्दु B के निर्देशांक (x_2,y_2) होगे।
3. A व B के बीच की दूरी बताइये।	समस्यात्मक प्रश्न

प्रस्तुतीकरण :

शिक्षक क्रिया / प्रश्न	छात्र क्रिया / उत्तर
प्रश्न. OL का मान बताइये ?	उत्तर : OL= x_1
प्रश्न. OM का मान बताइये?	उत्तर :OM= x_2
प्रश्न. LM का मान बताइये?	उत्तर :LM=OM-ON= x_2- x_1
प्रश्न. यदि AC ⊥ BM तो CM का मान बताइये?	उत्तर :CM=AL= y_1
प्रश्न. BM का मान बताइये?	उत्तर :BM= y_2
प्रश्न. BC का मान बताइये?	उत्तर :BC = BM-CM= y_2- y_1
प्रश्न. Δ ABC किस प्रकार का त्रिभुज है?	उत्तर :Δ ABC समकोण त्रिभुज है।
प्रश्न. Δ ABC में पाइयागोरस प्रमेय का उपयोग कर , हम क्या लिख सकते है।	उत्तर : पाइथागोरस प्रमेयानुसार $AB^2 = AC^2+BC^2$……..(!)
प्रश्न. AC का मान x अक्ष पर किस रेखा खण्ड के बराबर है?	उत्तर : AC = LM
प्रश्न. BC का मान y अक्ष पर किस रेखाखण्ड के बराबर है।	उत्तर : BC = QN
प्रश्न. समीकरण (i) में मान रख कर हल करे।	उत्तर : $AB^2= LM^2+BC^2$ $AB^2 = (x_2- x_1)^2+(y_2- y_1)^2$ $AB= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

निर्देश :1. पाठ्य पुस्तक की प्रश्नावली 7.1 के 10 प्रश्नों को इस सूत्र स्थापना के बाद हल करवाया जाए।

2. **प्रश्न क्रमांक –5 का प्रदर्शन ग्राफिकल बोर्ड पर करवाया जा सकता है।**
3. **अधिकांश प्रश्नों में प्रश्नोत्तर प्रविधि का उपयोग करना बेहतर होगा ।**

पुनरावृत्ति प्रश्न :

1. बिन्दुओ (a, b) और $(-a, -b)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
2. बिन्दुओं $(1,7), (4,2), (-1, -1)$ और $(-4,4)$)को मिलाकर बनने वाली आकृति का नाम बताइये।

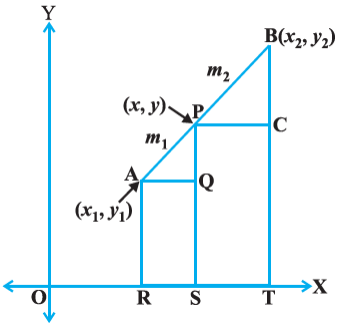
कक्षा कार्य :

1. $x -$ अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2,4)$ से समदूरस्थ है।
2. y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $P(2, -3)$ और $Q(10, y)$ की बीच की दूरी 10 मात्रक है।

गृह कार्य :

1. x और y में ऐसा संबंध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(3,6)$ और $(-3,4)$ से समदूरस्थ हो।
2. **प्रस्तावना –2:**

शिक्षक निम्नानुसार चित्र बनाकर प्रश्न पूछेंगे।



शिक्षक क्रिया/ प्रश्न	छात्र क्रिया /उत्तर
प्रश्न. यदि $OR = x_1, AR = y_1$ तो बिन्दु A के निर्देशांक बताइये।	उत्तर : बिन्दु A के निर्देशांक (x_1,y_1) होंगे।
प्रश्न. यदि $OT = x_2, BT = y_2$ तो बिन्दु B के निर्देशांक बताइये।	उत्तर : बिन्दु B के निर्देशांक (x_2,y_2) होगे।
प्रश्न. यदि $OS = x, PS = y$ तो बिन्दु P के निर्देशांक बताइये।	उत्तर : बिन्दु P के निर्देशांक (x,y) होंगे।
प्रश्न. यदि बिन्दु P रेखा AB को $m_1 : m_2$ में विभाजित करता है x व y के मान क्या होंगे।	समस्यात्मक

प्रस्तुतीकरण : शिक्षक प्रश्नोत्तर प्रविधि का उपयोग कर प्रस्तुतीकरण दे।

शिक्षक क्रिया/ प्रश्न	छात्र क्रिया /उत्तर
प्रश्न. $AQ = RS$ का मान बताइये। प्रश्न. $PC = ST$ का मान बताइये। प्रश्न. RT का मान बताइये। प्रश्न. ΔAPQ तथा ΔPBC किस प्रकार के त्रिभुज है। प्रश्नः समरूप त्रिभुजों की विशेषता बताइये।	उत्तर : $AQ = RS = x - x_1$ उत्तर : $PC = ST = x_2 - x$ होगे। उत्तर : $RT = y_2 - y_1$ उत्तर : ΔAPQ तथा ΔPBC समरूप है अर्थात $\Delta APQ \sim \Delta PBC$] उत्तर : समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती है।
प्रश्नः इस विशेषता का उपयोग करके ΔAPQ तथा ΔPBC में हम क्या लिख सकते है।	उत्तरः $\frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{PB}$ .....(1)

प्रश्न. समीकरण (1) $\frac{AQ}{PC} = \frac{AP}{PB}$ में लेकर मान रखें और x का मान निकालिये। (किसी छात्र को बुलाकर बोर्ड पर हल कराये।	$\frac{AQ}{PC} = \frac{AP}{PB}$ $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{m_1}{m_2}$ $m_2(x - x_1) = m_1(x_2 - x)$ $m_2x - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1x$ $m_2x + m_1x = m_1x_2 + m_2x_1$ $x(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$ $\boldsymbol{x} = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$
प्रश्न. इसी प्रकार समी. (1) में $\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{PB}$ लेकर मान रखें और y का मान निकालिए।	$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{PB}$ $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$ $m_2y - m_2y_1 = m_1y_2 - m_1y$ $m_2y + m_1y = m_1y_2 + m_2y_1$ $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$
प्रश्न. यदि बिन्दु P मध्य बिन्दु हो तो m_1 व m_2 कैसे होंगे। प्रश्न. $m_1 = m_2 = m$ लेकर x व y के मान निकालिये।	उत्तरः m_1 व m_2 आपस में बराबर होंगे अर्थात $m_1 = m_2$ छात्र स्वंय हल करेगे और $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$,

	$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ निकालेंगे।

निर्देश 1. विभाजन सूत्र (खण्ड सूत्र) की स्थापना के बाद प्रश्नावली 7.2 के प्रश्न क्रमांक 1 व 2 को हल करे।

2. प्रश्न क्रमांक 3 को क्रिया कलाप के माध्यम से हल करवाया जाए।

कुछ महत्वपूर्ण प्रश्न

प्र.1) बिन्दुओं P(a, b) तथा Q (-a, -b) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः– सूत्र दूरी PQ=

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

जहाँ बिन्दु P के निर्देशांक $= (x_1, y_1) = (a, b)$

तथा बिन्दु Q के निर्देशांक $= (x_2, y_2) = (-a, -b)$

अतः $x_1 = -a, y_1 = a, x_1 = b, y_2 = -b,$

सूत्र द्वारा PQ= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$PQ = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$

$PQ = \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$

$PQ = \sqrt{4a^2 + 4b^2}$

$PQ = \sqrt{4(a^2 + b^2)}$

$PQ = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

प्र.2) निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1,5) (2,3) और (-2,-11) संरेखी हैं।

हलः बिन्दुओं के संरेख होने पर इन बिन्दुओं द्वारा त्रिभुज का निर्माण संभव नहीं होगा अतः त्रिभुज का निर्माण संभव नहीं होगा अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होना चाहिए।

दिया है $x_1 = 1,\ y_1 = 5,\ x_2 = 2,\ y_2 = 3,\ \ x_3 = -2,\ y_3 = -11,$

एवं त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र = $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

मान रखने पर

$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[1(3 + 11) + 2(-11 - 5) + (-2)(5 - 3)]$

$= \frac{1}{2}[14 - 32 - 4]$

$= \frac{1}{2}[-22]$

$= -11$ जो कि शून्य नहीं है । अतः दिए गये बिन्दु संरेख नहीं है।

प्र.3) बिन्दुओं (–3, 10) और (6, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दुओं (–1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है।

हलः–विभाजन सूत्र $x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

तथा $m_1 : m_2$ ज्ञात करना है

अतः सूत्र

$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$x_1 = -3, x_2 = 6, x = -1$

$y_1 = 10, y_2 = -8, \quad y = 6$

$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

$-1 = \frac{m_1(6)+m_2(-3)}{m_1+m_2}$

$-m_1 - m_2 = 6m_1 - 3m_2$

$-m_2 + 3m_2 = 6m_1 + m_1$

$2m_2 = 7m_1$

$\frac{2}{7} = \frac{m_1}{m_2}$

$m_1 : m_2 = 2 : 7$

उत्तरः $m_1 : m_2 = 2 : 7$

पुनरावृत्ति प्रश्नः

1. विभाजन सूत्र की स्थापना के लिए आवश्यक चित्र बनाइये।
3. खण्ड सूत्र की सहायता से रेखा खण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

कक्षा कार्य :1. बिन्दुओं (–3,10) और (6,–8) को जोड़ने वाले रेखा खण्ड के लिए बिन्दु (–1,6) किस अनुपात में

विभाजित करता है।

2. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(1, -5)$ और $B(-4,5)$ को मिलाने वाले रेखा खण्ड को $x -$ अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।

गृह कार्य :1. यदि बिन्दु (1,2),(4, y), ($x, 6$), और ($3,5$),को इसी क्रम में लेने पर एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

2. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए , जहॉ AB एक वृत का व्यास है जिसका केन्द्र $(2,-5)$,है तथा B के निर्देशांक $(1,4)$, है।

3. बिन्दुओं $A(-2,2)$, और $B(2,5)$, को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

4. एक सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष , इसी क्रम में $(3,0)$, $(4,5)$, $(-1,4)$, और $(-2,-1)$, है।

कार्य पत्रक (पूर्व ज्ञान) अध्याय 7 : निर्देशांक ज्यामिति

कुल अंक = 6

1 अंक वाले = 1 प्रश्न

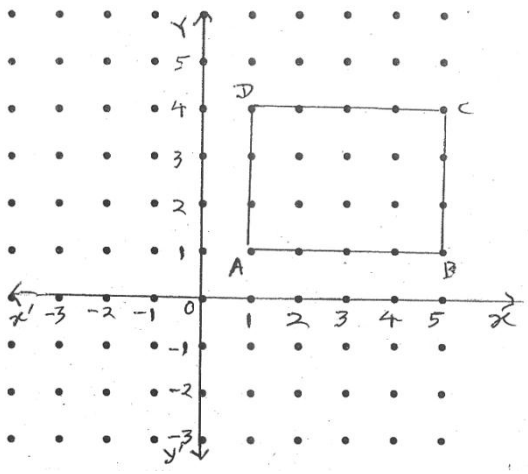
2 अंक वाले = 1 प्रश्न

3 अंक वाले = 1 प्रश्न

प्रश्न 1. सत्य /असत्य लिखिए :

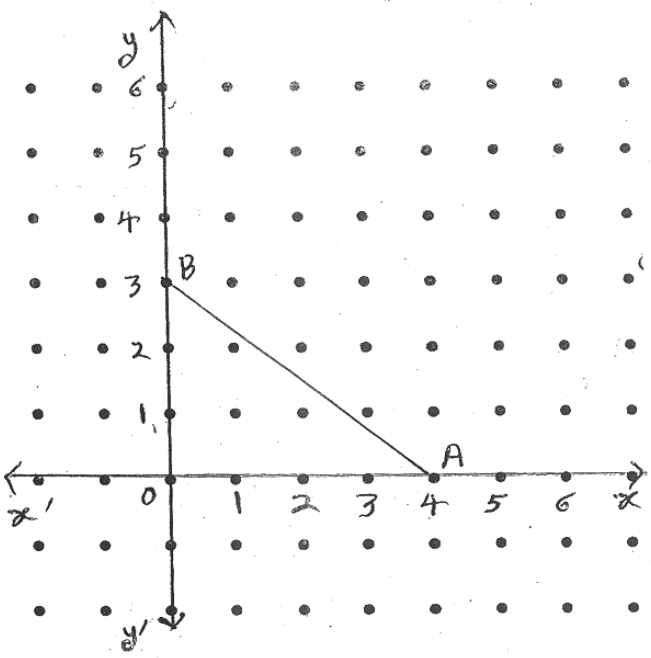
1. एक तल में एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो लाम्बिक रेखाओं की आवश्यकता होती है।
2. तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहते है।
3. क्षैतिज रेखा को $y-$ अक्ष और ऊर्ध्वाधर रेखा को x–अक्ष कहते है।
4. अक्षो के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु कहते है।
5. मूल बिन्दु के निर्देशांक (0,0) होते है।
6. बिन्दु (3,–2) प्रथम चतुर्थाश में स्थित हैं।
7. बिन्दु (–3,–5) तृतीय चतुर्थाश में स्थित है।
8. बिन्दु (3,–2) द्वितीय चतुर्थाश में स्थित है।
9. बिन्दु (3,0), $y-$अक्ष पर स्थित है।
10. बिन्दु (0, 5), $x-$ अक्ष पर स्थित हैं।
11. बिंन्दु (3,2),(5,3),(3,4) व (5,7) प्रथम चतुर्थाश में स्थित हैं।
12. बिन्दु (–3,0), (3,0),(5,0),(–5,0), $y-$ अक्ष पर स्थित हैं।

प्रश्न 2.



1. वर्ग $ABCD$ के शीर्ष A, B, C व D के निर्देशांक लिखिए।
2. बिन्दुओं A व B तथा D व C के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
3. बिन्दुओं A व D तथा B व C के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
4. क्या AB और DC बराबर है।
5. क्या AD और BC बराबर है।

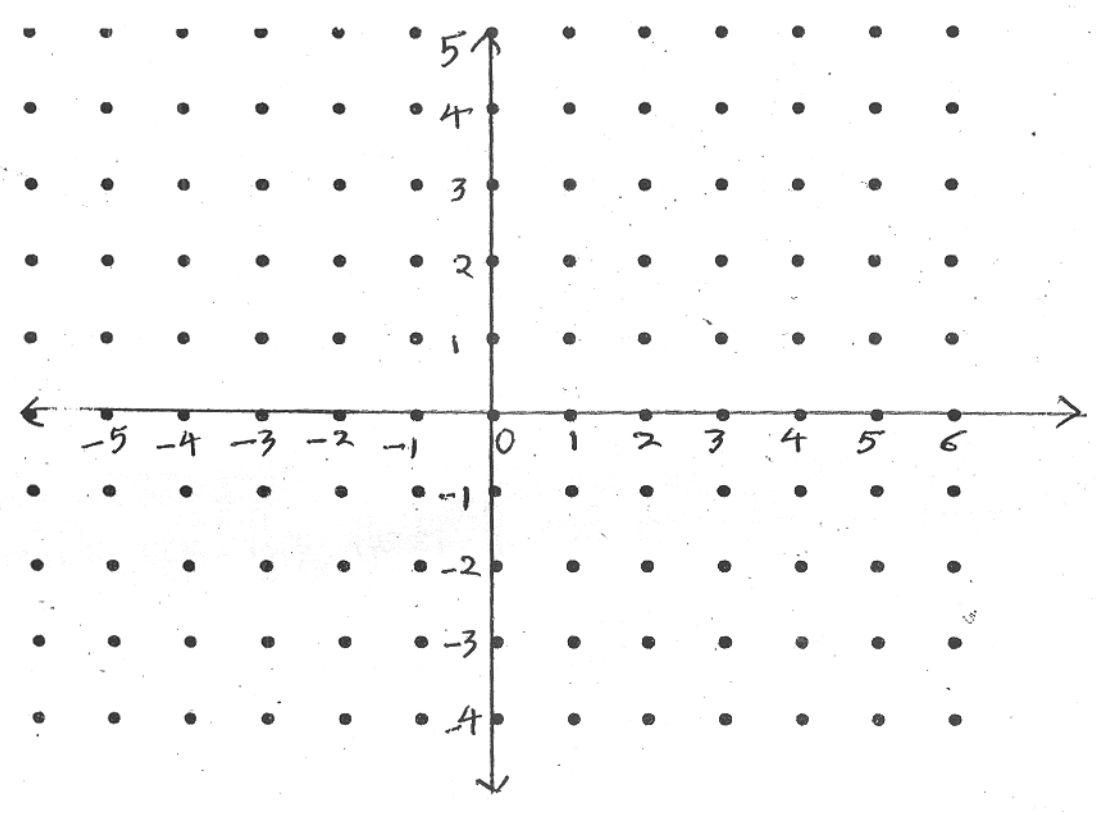
प्रश्न 3.



1. बिन्दुओं O, A व B के निर्देशांक लिखिए।
2. बिन्दुओं O और A के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
3. बिन्दुओं O और B के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
4. ΔOAB कौन सा त्रिभुज है।
5. बिन्दुओं A और B के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।(संकेत–पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से)

प्रश्न 4. नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए।

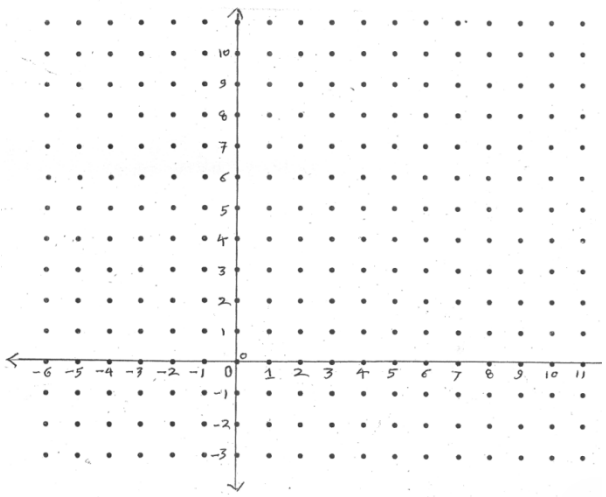
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	2	3	5	3	-2	5	2



1. उपरोक्त बिन्दुओं में से कौन से तीन बिन्दु एक रेखा में स्थित है।

कार्य पत्रक–2 निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्न 1. बिन्दु



$(4,8), B(3,9), C(3,8), D(1,6), E(1,5), F(3,3), G(6,3), H(8,5), I(8,6), J(6,8),$

$K(6,9)$ एवं $L(5,8)$ को आलेखित कीजिए।

हलः

प्रश्न 2. सही विकल्प चुनिएः **1 अंक**

1. बिन्दु $(x, 0)$ स्थित है।

   (a) x -अक्ष पर (b) y -अक्ष पर

   (c) प्रथम चतुर्थाश में (d) द्वितीय चतुर्थाश में

2. बिन्दु $P(x, y)$ की मूल बिन्दु से दूरी है ।

   (a) $\sqrt{x^2 - y^2}$ (b) $\sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $\sqrt{x + y}$ (d) $\sqrt{x - y}$

3. दो बिन्दु $A(5,0)$ तथा $B(8,0), x$ अक्ष पर स्थित है तो A व B के बीच की दूरी होगी।

   (a) 5 (b) 8

   (c) 3 (d) 13

4. दो बिन्दु $P(0,7)$ एवं $Q(0,11), y$ अक्ष पर स्थित है तो P व Q के बीच की दूरी होगी।

   (a) 7 (b) 4

   (c) 11 (d) 8

5. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB के मध्यबिन्दु के निर्देशांक होगे।

   (a) $\left(\frac{x_1-x_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

   (c) $\left(\frac{x_1+y_2}{2}, \frac{x_2+y_1}{2}\right)$ (d) $\left(\frac{x_1-y_2}{2}, \frac{x_2-y_1}{2}\right)$

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए।

1 अंक

1. मूल बिन्दु के निर्देशांक $(0,0)$ होते है।
2. $x -$ अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $(0, x)$ होता हैं।
3. $y -$ अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $(0, y)$ होता हैं।
4. बिन्दुओं $(-4,4)$एव $(8,12)$ के मध्यबिन्दु के निर्देशांक $(2,8)$होगें।

प्रश्न 4. बिन्दुओं $(2,3)$, एव $(4,1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 2 अंक

।

प्रश्न 5. $x-$ अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2,-5)$, और $(-2,9)$ से समदूरस्थ है। 3 अंक

प्रश्न 6. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1,7)$ और $(4,-3)$, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है। 3 अंक

प्रश्न 7. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहॉ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र $(2,-3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1,4)$ हे। 3 अंक

प्रश्न 8.बिन्दुओं $(-3,10)$ और $(6,-8)$ को जोड़ने रेखाखण्ड को बिन्दु $(-1,6)$ किस अनुपात में विभक्त करता है। 3 अंक

प्रश्न 9. $x-$ अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2,-5)$ और $(-2,9)$ से समदूरस्थ है। 2 अंक

प्रश्न 10. x और y में एक ऐसा सम्बन्ध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x,y) बिन्दुओं $(3,6)$ और $(-3,4)$ से समदूरस्थ हो । 3 अंक

टेस्ट पेपर (समान्तर श्रेणी, निर्देशांक ज्यामिति)

प्र.1) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :– (1x5=5)

i. 2, 7, 12 ..... का 10वां पद ..... है।

ii. श्रेणी 21, 18, 15 ..... का सार्वन्तर ..... है।

iii. प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं का योग ..... है।

iv. बिन्दु (3, 4) तथा (0, 0) का मध्य बिन्दु ..... है।

प्र.2) श्रेणी 7, 13, 19 ..... 205 में कितने पद हैं ? (3)

प्र.3) बिन्दु (3, 4) तथा (8, 16) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। (3)

प्र.4) बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2, –3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं। (3)

प्र.5) यदि किसी समान्तर श्रेणी का तीसरा एवं नौवां पद क्रमशः 4 तथा –8 है तो इसका कौन सा पद शून्य होगा ? (3)

प्र.6) 8 के प्रथम 15 गुणजो का योग ज्ञात कीजिए। (4)

——xxx——

अध्याय–11

रचनाएँ

निर्देश :

- इस अध्याय में 5 अंक निर्धारित है।
- चुंकि विद्यार्थी ज्यामितीय रचनाओं से पहले से परिचित हैं, इसलिए इस अध्याय को क्रिया कलाप आधारित शिक्षण से रूचिकर बनाया जा सकता है।
- रचनाओं के मूल्यांकन में चरण–बद्ध अंक प्रदाय (Stepwise marking) के महत्व को विद्यार्थियों को अवश्य बताया जाए।
- विभिन्न स्थितियों में त्रिभुज की रचना करना यद्यपि पिछली कक्षाओं की विषयवस्तु है, परन्तु उसकी यहाँ पुनरावृत्ति आवश्यक है।
- रचनाओं से सम्बधित गणितीय व्याख्याओं को बताना भी आवश्यक है।

उद्देश्य :

- विद्यार्थियों को, एक रेखाखण्ड को दिया हुए अनुपात में विभाजित करना सिखाना ।
- विद्यार्थियों को एक दिए हुए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज बनाना सिखाना।
- विद्यार्थियों को एक दिए हुए वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना करना सिखाना।

प्रस्तावना :

विद्यार्थी रेखा खण्ड का समद्विभाजन करना , यद्यपि पिछली कक्षाओं में सीख चुके है , तथापि यहॉ उसकी पुनरावृत्ति आवश्यक है।

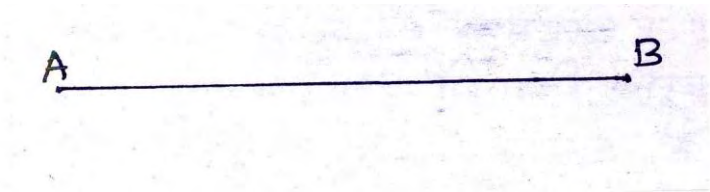
इसी प्रकार बिन्दु से किसी रेखा के समांतर रेखा खीचना किसी बिन्दु से किसी रेखा खण्ड पर लम्ब डालने का अभ्यास भी आवश्यक है।

प्रस्तावना –1

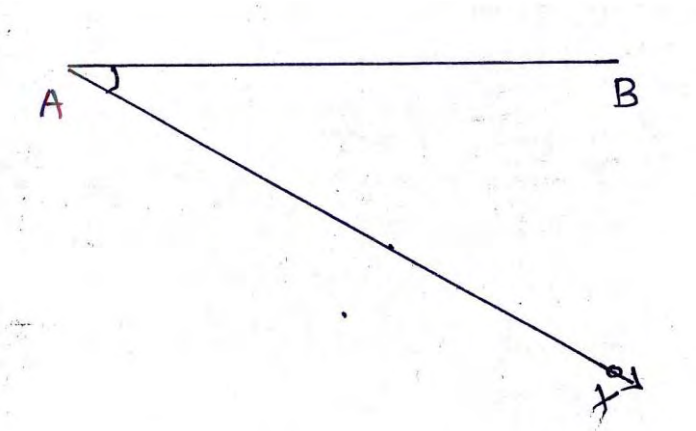
एक रेखा खण्ड बनाइये और उसे 3:2 में विभाजित करें।

रचना के चरण

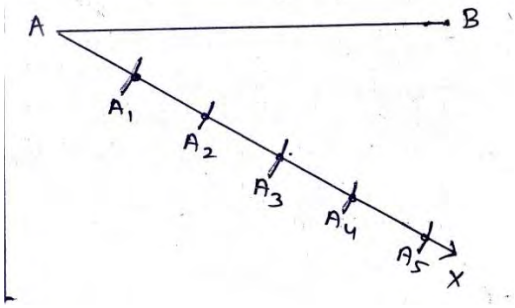
1. एक निश्चित लंबाई का रेखा खण्ड बनाइये।



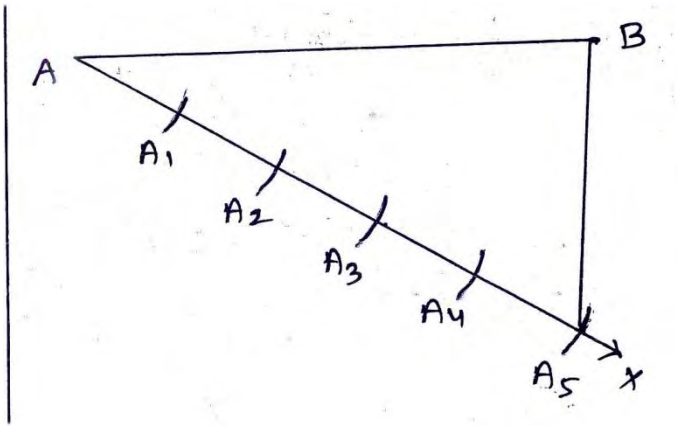
2. रेखा खण्ड AB से न्यून कोण बनाती हुई कोई किरण AX खीचिए।



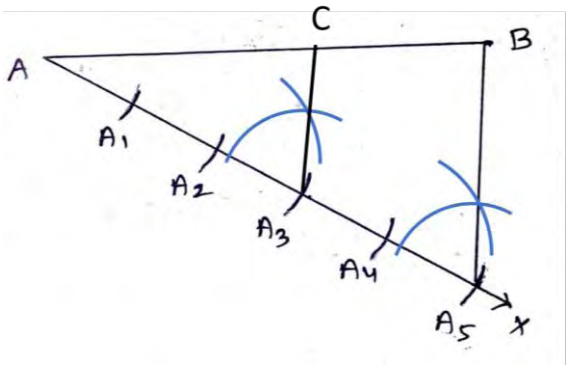
3. परकार की सहायता से AX पर 3+2=5 बिन्दु A_1,A_2,A_3, A_4 तथा A_5 बराबर दूरी पर अंकित कीजिए।



4. B से A_5 को मिलाईयैं



5. A_3 पर $\angle A A_5 B$ के बराबर कोण बना कर एक रेखा , AB को एक बिन्दु C पर प्रतिच्छेद करती हुई खीचिए । अब AC:CB = 3:2 होगा ।



गणितीय व्याख्या :

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{5} \qquad \text{.....(1)}$$

आधार भूत अनुपातिकता प्रमेय द्वारा

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{AB}$$

अतः (1) से $\frac{3}{5} = \frac{AC}{CB}$

इसलिये , रेखाखण्ड AB , बिन्दु C पर 3:2 में विभाजित होता है ।

1. किसी त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाईयॉ दी हो तो उस त्रिभुज की रचना कैस करेंगे। केवल चरण बोल कर बताइये।

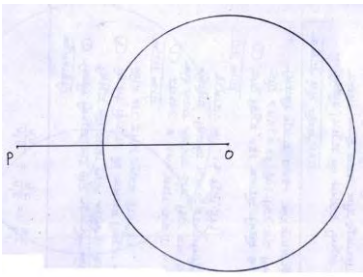
प्रकरण –4:

प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक –1.

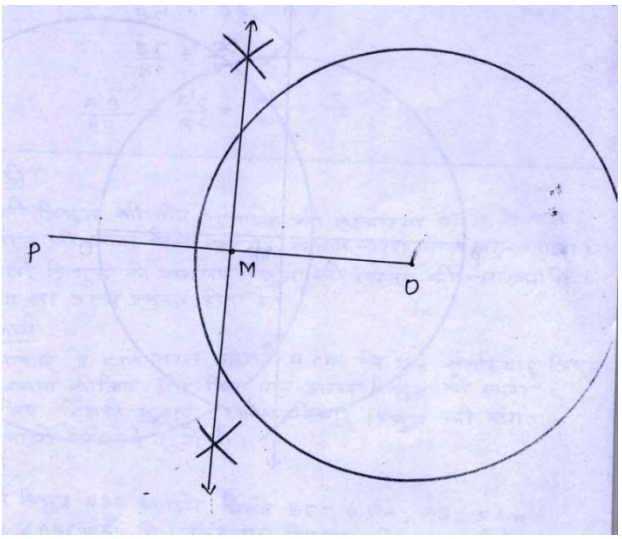
6 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए । केन्द्र से 10 सेमी. दूर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए । और उनकी लम्बाईया मापिए।

रचना के चरण

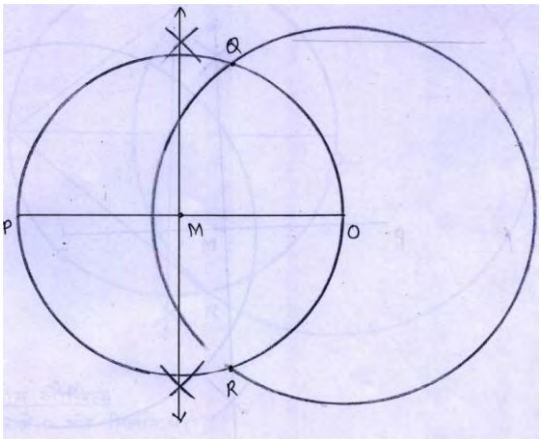
चरण 1. $6cm$ त्रिज्या का एक वृत्त बनाइये और उसके केन्द्र 0 से 10 सेमी दूरी पर एक बिंन्दु लीजिए तथा PO को मिलाइए।



चरण 2. OP को समहिभाजित कीजिए । माना PO का मध्य बिन्दु M ।

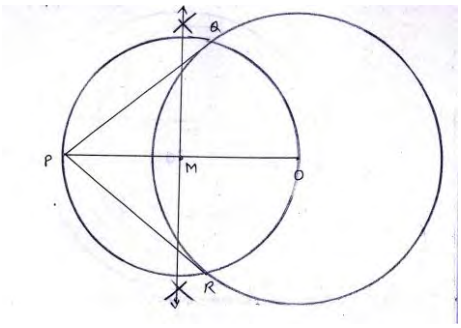


चरण 3. M को केन्द्र मानकर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त खीचिए। माना यह दिए गए वृत्त को Q और R पर प्रतिच्छेद करता है।



चरण 4. P को Q तथा R से मिला दीजिए। तब PQ तथा PR अभीष्ट दो स्पर्श रेखाएँ है।

$$PQ = PR = 8cm$$



अतः PQ वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

गणितीय औचित्य

Q से O को मिलाने पर

$\angle PQO = 90°$ (अर्द्ध वृत्त का कोण)

$\therefore OQ \perp PQ$

अतः PQ वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

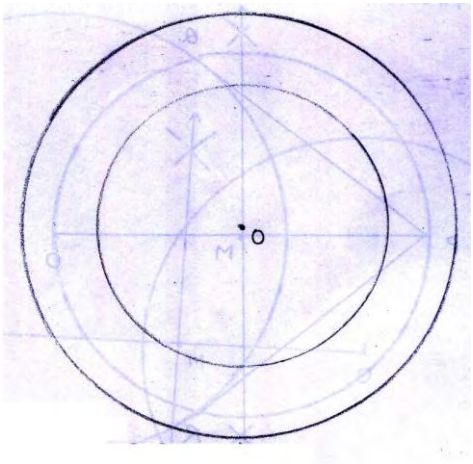
प्रकरण –5

(प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक –2)

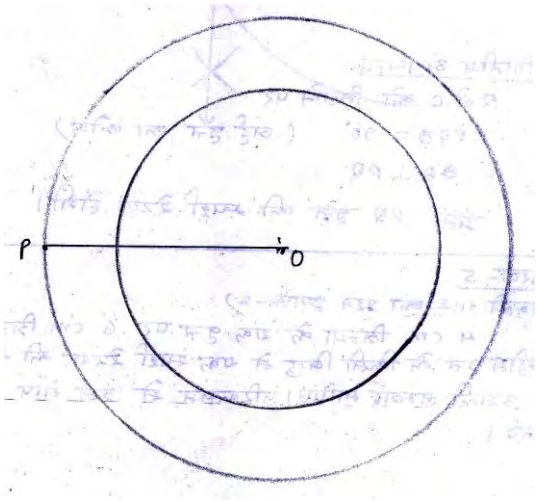
4 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 सेमी त्रिज्या के एक संकेन्द्रीय वृत्त के किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए। और उसकी लम्बाई मापिए। परिकलन से इस माप की जांच भी कीजिए।

रचना के चरण

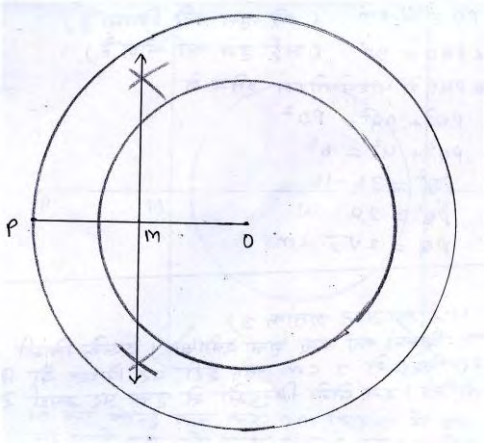
1. 4 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त की रचना कर उसके सकेन्द्र 6 सेमी. के एक वृत्त की रचना कीजिए।



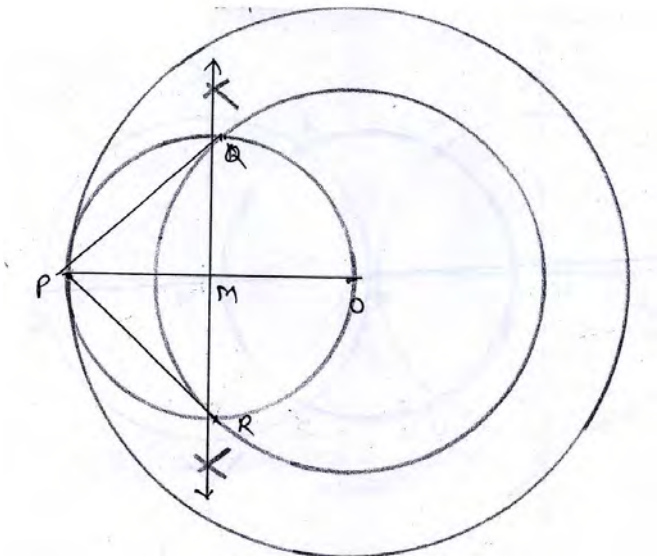
2. 6 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त पर एक बिन्दु P लीजिए P से o को मिला दीजिए।



3. PO का लम्बार्द्धक कीजिए जो बिन्दु M पर समहिभाजित होता है।



4. OM त्रिज्या वाला वृत्त ,M को केन्द्र मानकर खीचिए जो छोटे वृत्त को Q तथा R पर प्रतिच्छेद करता है। PQ तथा PR को मिला दीजिए । PQ तथा PR अभीष्ट स्पर्श रेखाए है।



परिकलन :

$\mathrm{OQ} = 4\ \mathrm{cm}$ (छोटे वृत्त की त्रिज्या है।)

$\mathrm{PO} = 6\ \mathrm{cm}$ (बड़े वृत्त की त्रिज्या है।)

$\angle PQO = 90°$ (अर्द्ध वृत्त का कोण है)

PQR में पाइथोगोरस प्रमेय से

$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{OQ}^2 = \mathrm{PO}^2$

$\mathrm{PQ}^2 + 4^2 = 6^2$

$\mathrm{PQ}^2 = 36 - 16$

$\mathrm{PQ}^2 = 20$

$\mathrm{PQ} = 2\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$

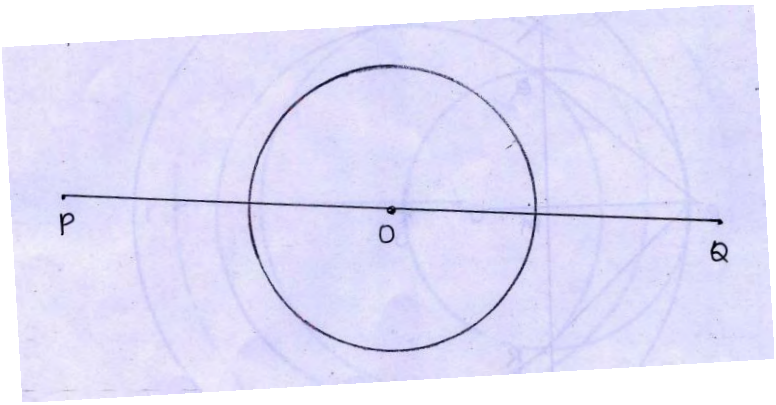
प्रकरण–6

(प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक 3)

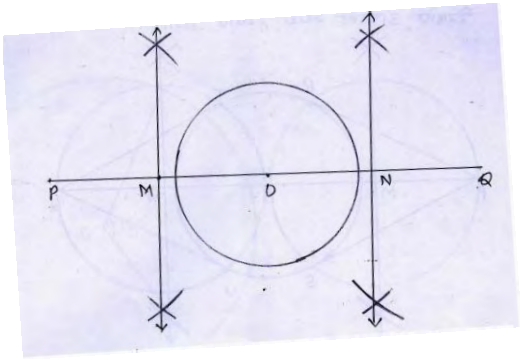
3 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए । इसके किसी बढ़ाये गये व्यास पर केन्द्र से 7 सेमी. की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए । इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खीचिए।

रचना के चरण

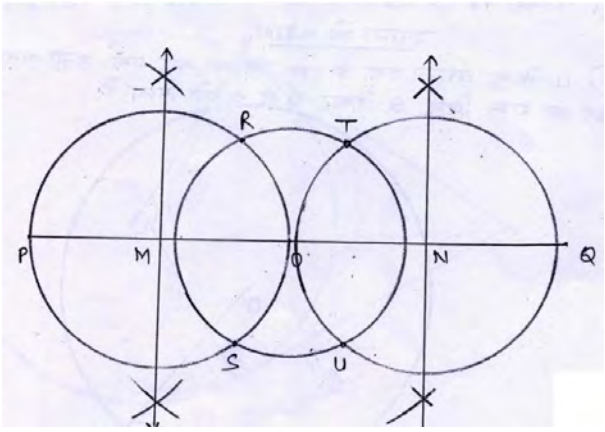
1. 3 सेमी. त्रिज्या का 0 केन्द्र वाला वृत्त बनाइये इसके व्यास को बढ़ाकर दोनों ओर दो बिन्दु P तथा Q इस प्रकार लीजिए कि $OP = OQ = 7\ cm.$



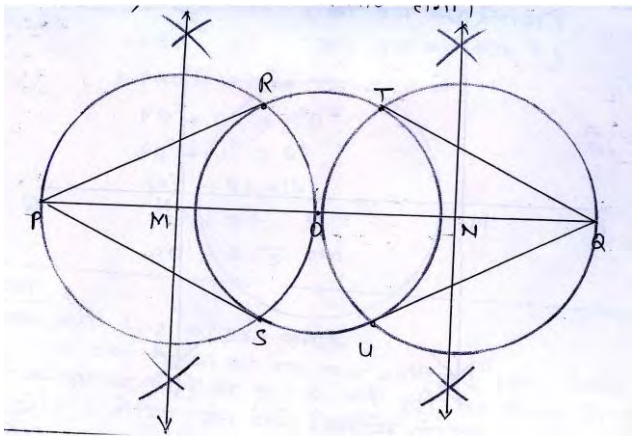
2. OP तथा OQ के लम्ब समद्विभाजक खीचिए जो OP तथा OQ को क्रमशः M तथा N पर काटते है।



3. M को केन्द्र मान कर OM त्रिज्या से एक वृत्त खीचिए जो पहले वृत्त को माना R व S पर काटता है। इसी प्रकार N को केन्द्र मान कर ON त्रिज्या से एक और वृत्त खीचिए जो पहले वाले वृत्त को माना T व U पर काटता है।



4. P को R व S से मिलाने पर PR व PS स्पर्श रेखाये तथा Q को T व U से मिलाने पर QT व QU स्पर्श रेखाएँ, अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ होंगी।



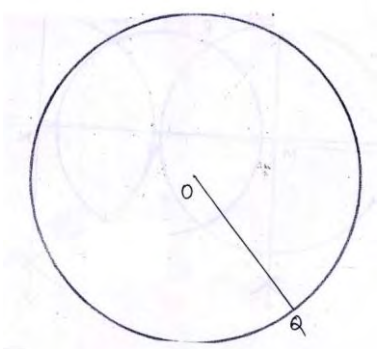
प्रकरण –7:

(प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक 4)

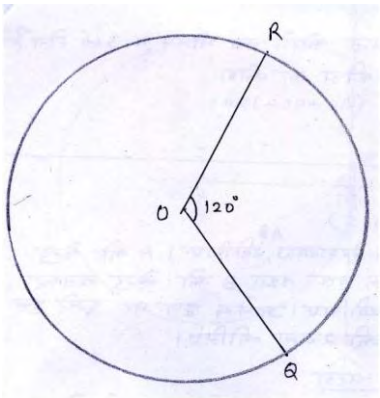
5 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खीचिए जो परस्पर 60^0 पर झुकी हो।

रचना के चरण

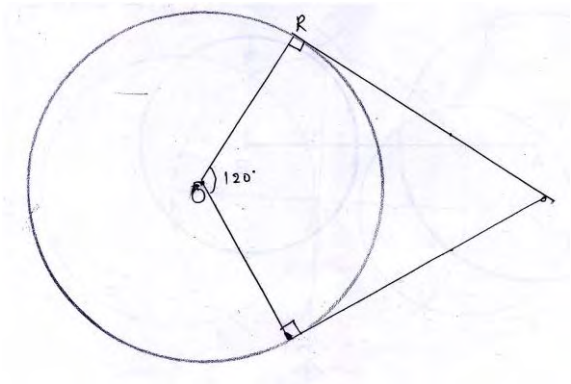
1. O केन्द्र वाला एवं $5cm$ त्रिज्या का एक वृत्त बनाइये एवं उस पर एक बिन्दु Q लेकर O से Q को मिला दे।



1. O पर OQ से 120^0 का कोण बनाते हुई रेखा खीचिए। जो वृत्त को R पर काटती है । इस प्रकार $\angle QOR = 120^0$ दृ



2. OR के साथ बिन्दु R पर तथा OQ को साथ बिन्दु Q पर $90^0 - 90^0$ का कोण बनाती हुई रेखाएं खीचिए जो एक दूसरे से पर मिलती हैं । PQ तथा PR अभीष्ट स्पर्श रेखाएं होगी।



गणितीय औचित्य

हम जानते है कि वृत्त की त्रिज्या और स्पर्श रेखा परस्पर लम्ब होते है।

एवं

चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योगफल 360^0 होता है। इसलिए स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण

$$\angle QPO = 360 - (90 + 90 + 120)$$

$$\angle QPO = 60^0$$

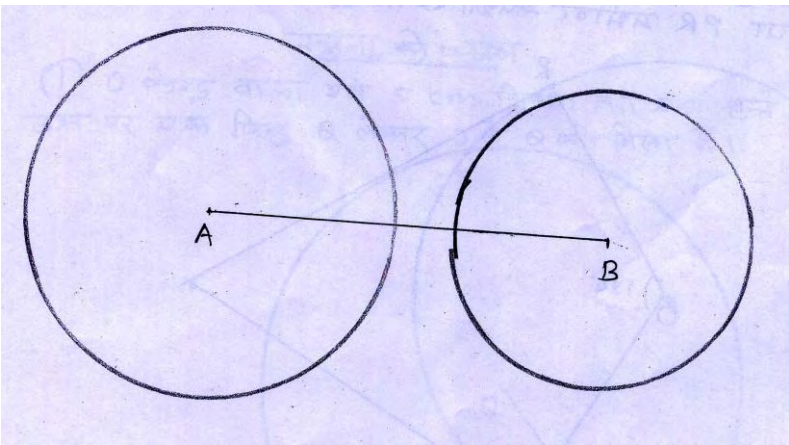
प्रकरण –8

(प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक –5)

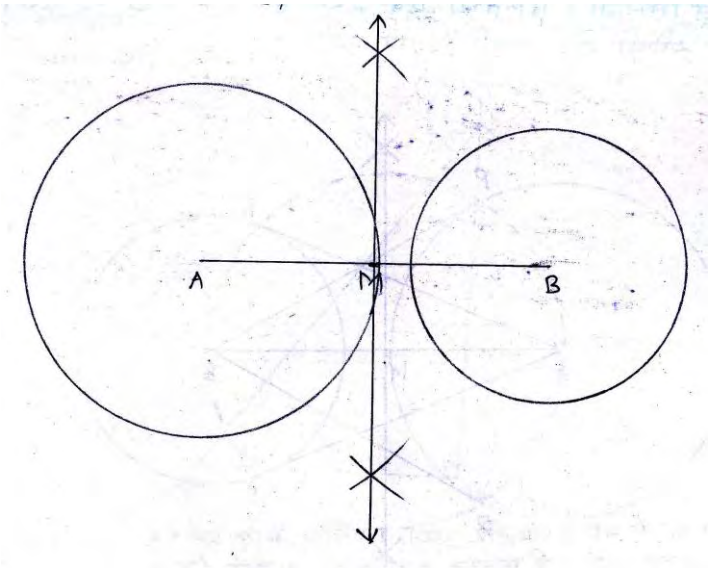
8 सेमी. लम्बा एक रेखाखण्ड AB खीचिए । A को केन्द्र मानकर 4 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केन्द्र मानकर 3 सेमी. त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खीचिए । प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

रचना के चरण

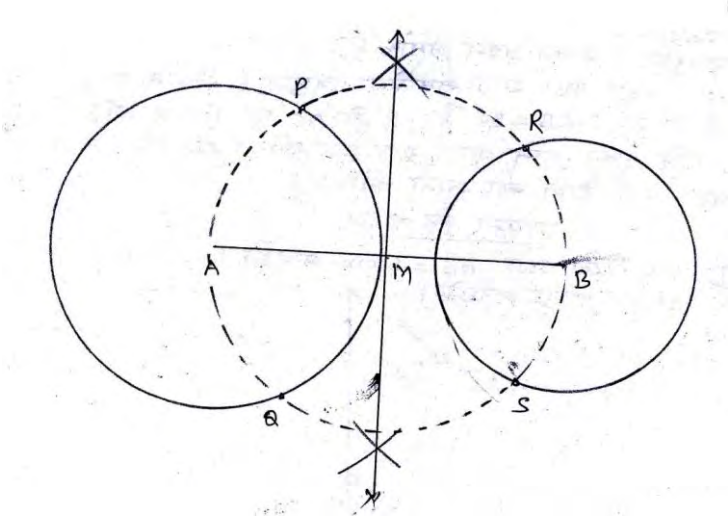
1. 8 सेमी. लम्बा एक रेखा खण्ड AB खीचा। A को केन्द्र मानकर $4cm$ त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केन्द्र मानकर 3 सेमी. एक वृत्त खीचिए।



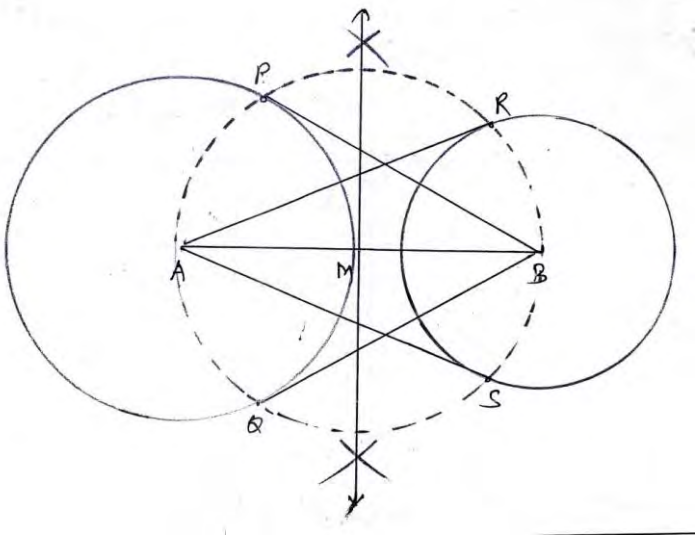
2. AB का लम्ब समद्विभाजक खीचा । माना AB, बिन्दु M पर समद्विभाजित होता है ।



3. M को केन्द्र मानकर OA त्रिज्या से एक वृत्त की रचना की जो पहले वृत्त को तथा पर और दूसरे वृत्त को P तथा Q पर प्रतिच्छेद करता है।



4. A को R तथा S से मिलाया । AR तथा AS पहले वृत्त से दूसरे वृत्त पर खीची गयी स्पर्श रेखाएँ होगी। B को Q से मिलाया । BP तथा BQ , दूसरे वृत्त के केन्द्र से पहले पर खीची गई स्पर्श रेखाए होगी।



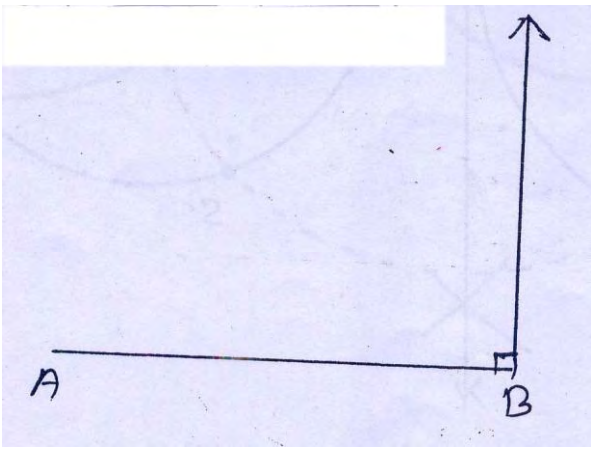
प्रकरण –8:

(प्रश्नावली 11.2 का प्रश्न क्रमांक 6)

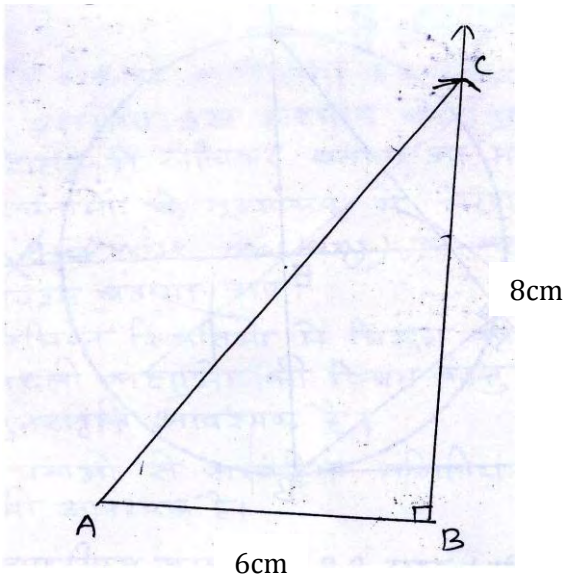
माना ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $AB = 6\ cm, BC = 8cm$ तथा$\angle\ B = 90^0$ है। B से AC पर BD लम्ब है । बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खीचा गया है ।A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए ।

रचना के चरण

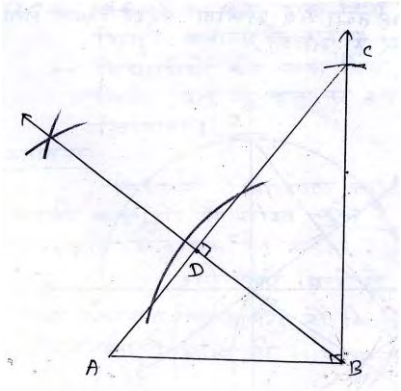
1. एक रेखा खण्ड $AB = 6\ cm$ बनाईये। B पर, AB के साथ 90^0 का कोण बनाईये।



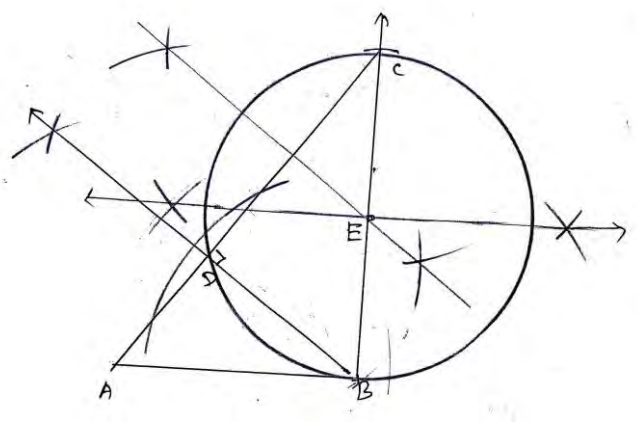
2. बिन्दु B पर परस्पर की नोक रखकर 8 सेमी. की त्रिज्या से समकोण बनाने वाली भुजा पर चाप काटकर बिन्दु C प्राप्त कीजिए। बिन्दु C को A से मिलाने पर समकोण त्रिभुज प्राप्त ABC हुआ।



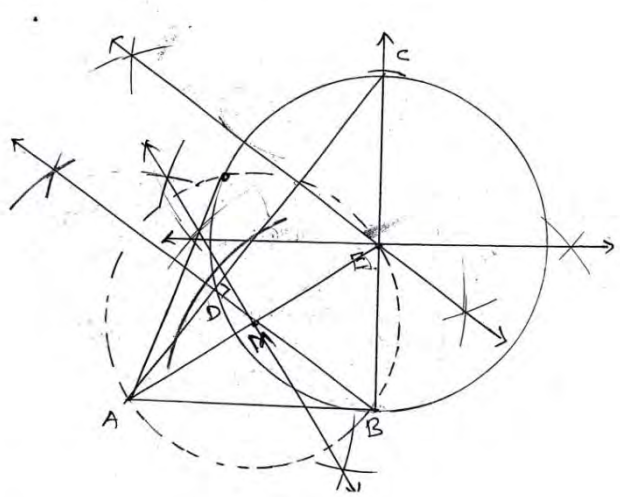
3. बिन्दु B से AC पर लम्ब डालिए। (यह प्रक्रिया पृथक से अभ्यास करायी जाय) लम्ब AC को D पर काटती है इस प्रकार $BD \perp AC$



4. ΔBCD का परिगत वृत्त खीचिए।



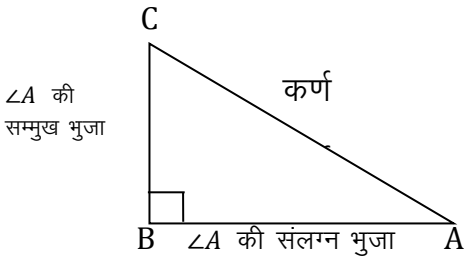
5. A से E को मिलाइये । तथा AE का लम्ब समद्विभाजक खीचिए। माना AE बिन्दु M पर समद्विभाजित होता है । M को केन्द्र मानकर वृत्त बनाइये जो परिगत वृत्त को P तथा Q पर काटता है। A सेP तथा Q को मिलाइये। AP तथाAQ अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ होगी। (बिन्दु Q, B पर ही आएगा।)



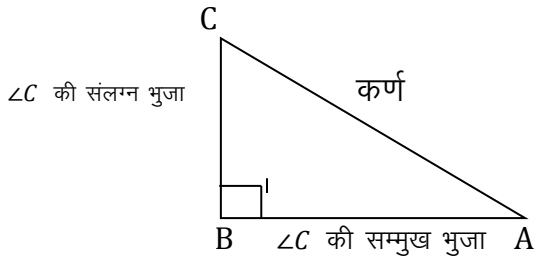
त्रिकोणमिति का परिचय

त्रिकोणमिति में समकोण त्रिभुत की भुजाओं के अनुपातों का उनके न्यून कोणों के सापेक्ष अध्ययन हैं जिन्हें त्रिकोणमितिय अनुपात कहते हैं।

किसी समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$ हैं तब



या



$\angle A$ का $Sine = \frac{\text{कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

$\angle A$ की $Cosine = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\angle A$ की $Tangent = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{लम्ब}/\text{कर्ण}}{\text{आधार}/\text{कर्ण}} = \frac{Sine}{Cosine}$

$\angle A$ की $Cosecant = \frac{1}{\text{A का } sine} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

$\angle A$ की $Secant = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{CosA}$

$\angle A$ की $Cotangent = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{TanA} = \frac{CosA}{SinA}$

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं ∞
Cot	परिभाषित नहीं ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	परिभाषित नहीं ∞
Cosec	परिभाषित नहीं ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

त्रिकोणमितिय सर्व समिकाऐं

i. $Sin^2A + Cos^2A = 1$
ii. $1 + Tan^2A = Sec^2A$
iii. $1 + Cot^2A = Cosec^2A$

सर्व समिकाओं के आधार पर त्रिकोणमितिय संबंध

$Sin^2A = 1 - Cos^2A$

$Cos^2A = 1 - Sin^2A$
$Sec^2A - 1 = Tan^2A$
$Sec^2A - Tan^2A - 1$
$Cosec^2A - 1 = Cot^2A$
$Cosec^2A - Cot^2A = 1$
कुछ महत्वपूर्ण संबंध

$CosecA = \frac{1}{\text{SinA}}$
$SecA = \frac{1}{\text{CosA}}$
$Cot\ A = \frac{1}{\text{TanA}}$
$CotA = \frac{\text{CosA}}{\text{SinA}}$
$TanA = \frac{\text{SinA}}{\text{CosA}}$
सही जोडी बनाईये

1. $1 - \text{Cos}^2\text{A}$	(a) Sec^2A
2. $Sin0°$	(b) Sin^2A
3. $1 - \text{Sin}^2\mathbf{A}$	(c) 0
4. $1 + \text{Tan}^2\text{A}$	(d) 1
5. Tan $45°$	(e) $\frac{1}{\text{Sec}^2\text{A}}$

उत्तर– $1 \rightarrow b, 2 \rightarrow c, 3 \rightarrow e, 4 \rightarrow a, 5 \rightarrow d$

सही जोडी बनाईये

1. $\text{Sin}30^0$	(a) 0
2. $\text{Tan}45^0$	(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\text{Sec}45^0$	(c) 1
4. $\text{Cos}90^0$	(d) $\frac{1}{2}$
5. $\text{Sin}60^0$	(e) $\sqrt{2}$

उत्तर– $1 \rightarrow d, 2 \rightarrow c, 3 \rightarrow e, 4 \rightarrow a, 5 \rightarrow b$

सही जोडी बनाईये

1. $\text{Sin}^2 30^0$	(a) $\frac{1}{2}$
2. $\text{Sin}60^0\text{Cosec}60^0$	(b) $1 - \text{Cos}^2 30$
3. $\text{Tan}45^0$	(c) $\text{Sin}0^0$
4. $\text{Cos}^2 90$	(d) $\frac{1}{\text{Cot}45^0}$
5. $\text{Sin}60^0$	(e) 1

उत्तर– $1 \rightarrow b, 2 \rightarrow e, 3 \rightarrow d, 4 \rightarrow c, 5 \rightarrow a$

टेस्ट पेपर (रचनाऐं, त्रिकोणमिति का परिचय)

प्र01 सही जोडी बनाईये

1. $\text{Sin}^2 30^0$	(a) $\sqrt{2}$
2. $\text{Cos}90^0$	(b) $\sqrt{3}$
3. $\text{Sec}45^0$	(c) 1
4. $\text{Sec}^2 20^0 - \text{Tan}^2 20^0$	(d) $\frac{1}{4}$
5. $\tan 60^0$	(e) 0

प्र02 $5cm$ त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाऐ खीचिए जो परस्पर के 60^0 कोण पर झुकी हों।

प्र03 $5cm$ त्रिज्या के एक वृत्त खीचिए। केन्द्र से $10cm$ दूर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लम्बाइयॉ नापिये।

अध्याय–14

सांख्यिकी

शिक्षकों के लिए निर्देश

- इस अध्याय से वार्षिक परीक्षा में अंकों का अधिभार निम्नानुसार हैः–

  1 अंक के प्रश्न – 2 प्रश्न = कुल अंक – 02.

  5 अंक के प्रश्न – 1 प्रश्न = कुल अंक – 05.

- विद्यार्थी आंकड़ों के वर्गीकरण, बारंबारता, आकड़ों के आलेख आदि से परिचित हैं।
- विद्यार्थियों के पूर्वज्ञान की स्थिति को जाँचने के लिए चर्चा की जावे।
- विद्यार्थी माध्य, माध्यक एवं बहुलक की अवधारणा से परिचित हो, अन्यथा उसे परिचित कराया जाना चाहिए।

उद्देश्य :–

- छात्र/विद्यार्थी केन्द्रीय प्रवृति की माप (माध्य, माध्यक, बहुलक) दिये हुये आंकड़ों की सहायता से ज्ञात करने में सक्षम हो सकेंगे।
- प्रत्येक के गुण और अवगुण को समझ सकेंगे।
- प्रश्न पढ़कर क्या ज्ञात करना है इसकी भी समझ विकसित हो सकेगी।

प्रस्तावना :– हम अपने दैनिक जीवन में किसी न किसी रूप में अर्थ पूर्ण सूचनायें तैयार करने के लिये आंकड़ों का प्रयोग करते हैं। इन सूचनाओं से संबंधित अध्ययन हम सांख्यिकी की सहायता से करते हैं।

गतिविधि :–

शिक्षक –आज हम त्रैमासिक परीक्षा में गणित विषय में प्राप्त आप सभी विद्यार्थीयों के प्राप्तांको के आधार पर आपके गणित के स्तर का पता लगाने के लिए एक सूची बनाएंगे। रोल नं. 1 से 30 तक के विद्यार्थी बोर्ड पर अपना नाम व नाम के सामने अपने प्राप्तांक लिखिए।

छात्र/छात्राएँ निम्नानुसार नाम एवं अंक लिखते हैं।

विद्यार्थी का नाम	गणित से प्राप्तांक
A	10
B	50
C	36
-	- -

कक्षा 10 में अध्ययन 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित के एक पेपर में 100 में से प्राप्त किये गये अंक – 10, 50, 36, 40, 36, 36, 40, 40, 40, 95, 80, 88, 88, 92, 72, 92, 70, 92, 56, 60, 56, 70, 70, 70, 50, 50, 20, 50, 10, 60.

i. व्यक्तिगत श्रेणी/अवर्गीकृत आँकड़े
ii. असतत श्रेणी (वर्गीकृत आँकड़े)
iii. केन्द्रीय प्रवृति की माप की व्याख्या (परिभाषा एवं सूत्र)

प्रत्येक स्थिति में

i. समांतर माध्य
ii. असतत श्रेणी में व्यवस्थित कीजिये (वर्गीकृत आंकड़े)
iii. बहुलक, ज्ञात करें।

गतिविधियाँ :– (क्रिया कलाप)(सुझाव)

i. भारोतोलक म ीन (Weighing Machine) की सहायता कक्षा 10 के सभी 30 छात्रों का भार मापन करके प्राप्त आकड़ों की सहायता की सहायता औसत समान्तर माध्य ज्ञात करना।
ii. दीवार पर लम्बाई के पैमाने की सहायता से कक्षा के सभी छात्रों की लम्बाई का मापन करने पर प्राप्त आकड़ों की सहायता से औसत, और माध्यका की गणना करना।
iii. कक्षा 10 के सभी छात्रों (30 छात्र) के कमीज (Shirt) की साइज़ (माप), मैं जैसे 30, 32 इत्यादि को ज्ञात करने पर प्राप्त आकड़ों की सहायता से बहुलक (Mode) ज्ञात करना है।
iv. गणित के मासिक टेस्ट के प्राप्त को ज्ञात करके समांतर माध्य ज्ञात करना है।
v. अपने भाहर में 30 दिन का रिकार्ड किए गए दैनिक अधिकतम तापमान एकत्रित करके उन आकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

समान्तर माध्य का उद्देश्य – समान्तर माध्य के माध्यम से बच्चों में किसी आंकड़े के (वर्गीकृत अथवा अवर्गीकृत) औसत मान या माध्य ज्ञात करने को समस्त विकसित रखा। जैसे किसी प्रेक्षणों का माध्य सभी प्रेक्षणों के मानों के योग में प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

कक्षा IX में यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, - - x_n$ के बारंबारता क्रमशः $f_1, f_2 - - f_n$ होती।

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + - - + f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 - - + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

यदि आँकड़े अवर्गीकृत हो तो माध्य ज्ञात करने का सूत्र

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

माध्य ज्ञात करने की <u>विचलन विधि</u> (लधु विधि)/कल्पित माध्य विधि

$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$, जहाँ $di = x_i - a$

मूल्यांकन : (1) एक मोहल्ले के 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण के परिणाम स्वरूप विभिन्न परिवेश के सदस्यों की संख्या निम्न है:

परिवार माप	1–3	3–5	5–7	7–9	9–11	
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1	

उन आकड़ों से संक्षिप्त विधि से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

(2) निम्न सारणी में विभिन्न राज्यों के प्राथमिक विद्यालयों में महिला शिक्षकों के प्रतिशत बंटन को दर्शाती है।

महिला शिक्षकों काप्रतिशत	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85
राज्यों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

तीनों विधियों से महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत ज्ञात कीजिए बताइये की कौन सी विधि बेहतर है और क्यों?

गृहकार्य :

i. समातर माध्य के गुण एवं दोष लिखें।

ii. समांतर माध्य की उपयोगिता बताइये।

iii. सांख्यिकी की परीक्षा में दस बच्चों में निम्न निम्नलिखित अंक प्राप्त किए उनका मध्ययान (औसत) ज्ञात करें।

18, 20, 30, 35, 40, 15, 7, 8, 12, 45

पुनरावत्ति एवं अभ्यास हेतु महत्वपूर्ण प्रश्न :–

प्रश्न क्र. (1) प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात करो।

प्रश्न क्र. (2) प्रथम पाँच विषम संख्याओं का माध्य ज्ञात करो।

प्रश्न क्र. (3) 1, 2, 3, 4, 5, 6 का माध्य ज्ञात करो।

प्रश्न क्र. (4) समान्तर माध्य को परिभाषा लिखो।

प्रश्न क्र. (5) जब आँकड़े अवर्गीकत हो तो समान्तर माध्य ज्ञात करने का सूत्र लिखो।

प्रश्न क्र. (6) माध्य ज्ञात करने की कल्पित विधि का सूत्र लिखो।

प्रश्न क्र. (7) किसी स्कूल के कक्षा X के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित के एक पेपर मे 100 मे से प्राप्त किए गए अंक, नीचे एक सारणी में दिए गए हैं इन विधार्थीयों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिये।

प्राप्तांक (x)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्यार्थियो की संख्या (f)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

प्रश्न क्र. (8) निम्न आकड़ों $x, x+2, x+3, x+4,$ का माध्य 10 हो तो x का मान ज्ञात करो।

प्रश्न क्र. (9) निम्नलिखित आकड़ों का मध्यमान कल्पित मध्यमान विधि द्वारा ज्ञात करो।

30, 28, 25, 27, 23, 21, 20, 22, 24, 26 तथा 28

प्रश्न क्र. (10) कक्षा में निम्न दी गई श्रेणी का माध्य ज्ञात कीजिये जिसमें

वर्ग अंतराण	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
आवृत्रि	5	8	4	10	7	6

प्रश्न क्र. (11) निम्ललिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों में दैनिक जैब खर्च दर्शाता है। माध्य जेब खर्च 18 रूपये है लुप्त बारंबारता ज्ञात f कीजिये।

दैनिक जीवन भत्ता रूपयों में	11–13	13–15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

क्रिया कलाप : 2

क्रिया कलाप 1 एक में प्राप्त आकड़ों की सहायता से बारंबारता सारणी बनाईए तथा संक्षिप्त विधि से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

स्मरणीय बिन्दु :

i. औसत $= = \frac{\text{आकडो का योगफल}}{\text{आकडो की संख्या}}$

ii. संक्षिप्त विधि से समांतर माध्य $= \mathrm{a} + \frac{\sum fi\, di,}{\sum fi}$ जहाँ $di = x_i - a$,

ज्हाँ a, काल्पितमाध्य (assumed mean) है।

माध्यक :– माध्यक दिए हुए प्रेक्षणों में मान होता है। जब आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आंकड़ों के माध्यक का परिकलन किया जाता है।

i. जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान होता है।

उदाहरण के लिए यदि $n = 11$ है तो, $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ वें अर्थात् 7वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा।

ii. जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य होता है।

उदाहरण के लिए यदि $n = 14$ है तो $\left(\frac{14}{2}\right)$ वें, $\left(\frac{14}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों, के मानों का माध्य अर्थात 7वें एवं 8वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

iii. वगीकृत आँकणों को माध्यक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति ज्ञात करते हैं :–

माध्यक $= l + \left(\frac{N/_2 - cf}{f}\right) \times h$

जहाँ l = माध्यक वर्ग की निम्नसीमा

n = प्रेक्षणों की संख्या

cf = माध्यक वर्ग के ठीक पहले की संचयी बारंबारता

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग माप

अभ्यास प्रश्न :

Q1 :- प्रथम पाँच विषम प्राकृतिक संख्याओं की माध्यक होगा –

(i) 1 (ii) 3 (iii) 4 (iv) 5

Q2 :- वर्गीकृत आँकड़ों की माध्यक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हल निकालते हैं–

(i) माध्य (ii) मध्य बिन्दु (iii) सचयी बारंबारता (iv) माध्यम

Q3 :- 7, 3, 8, 9, 5, की माध्यक होगी –

(i) 7 (ii) 9 (iii) 0 (iv) 3

Q4 :- जब प्रेक्षणों की संख्या विषय हो तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं

(i) $\frac{n+1}{2}$ (ii) $\frac{n}{2}$ (iii) $\frac{n}{2}+1$ (iv) इनमें से कोई नहीं

Q5 :- सत्य/असत्य लिखिए –

(i) केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापकों में सम्बन्ध है :–

3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य

(ii) संचयी बारंबारता सभी आवृत्तियों का योग है।

(iii) आँकड़ों के संग्रह से माध्यिका ज्ञात की जा सकती है।

(iv) संचयी बारंबारता का आलेखीय निसपन संभव है

(v) माध्यक द्वारा हम औसतमान की गणना नहीं कर सकते हैं।

Ans.- (i) 5 (ii) संचयी बारंबारता (iii) 7 (iv) $\frac{n+1}{2}$ (v) T,F,T,T,T

Q6 :- निम्नलिखित आँकड़ो का माध्यक ज्ञात कीजिए – (5 अंक)

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियो की संख्या	5	3	4	3	3	4	7	9	7	8

हल :– (कुल अंक 5)

प्राप्तांक	विद्यार्थीयों की संख्या	संचयी बारंबारता
0–15	5	5
10–20	3	8
20–30	4	12
30–40	3	15
40–50	3	18
50–60	4	22
60–70	7	29

70–80	9	38
80–90	7	45
90–100	8	53

$n = 53$ | $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$

अत : माध्यक वर्ग 60–70

$\frac{n}{2} = 26.5$

$l = 60$

$cf = 22$

$f = 7$

$h = 10$

माध्यक = $l + \frac{\left(\frac{n}{2} - cf\right)}{f} \times h$

$= 60 + \left(\frac{26.5-22}{7}\right) \times 10$

$= 60 + \frac{45}{7}$

$= 66.4$

अर्थात आधे विद्यार्थीयों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए हैं तथा भोष आधे विद्यार्थीयों ने 66.4 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं।

वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

दिए गए प्रेक्षणों का वह मान जो सबसे अधिक बार भाग है अर्थात उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारंबारता सबसे अधिक होती है।

अभ्यास प्रश्न :–

(vi) सबसे अधिक बारंबारता वाले आँकड़ों को कहते हैं :–

(a) समान्तर माध्य (b) माध्यक

(c) बहुलक (d) इनमें से कोई नहीं

(vii) निम्न आँकड़ों का बहुलक होगा 2, 4, 8, 7, 5, 4, 9, 6, 7, 1, 7 :–

(a) 2 (b) 7

(c) 8 (d) 9

(viii) आकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक होगा

(a) 14 (b) 18

(c) 28 (d) 25

(ix) वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने का सूत्र है :–

(a) $\frac{\sum fx}{\sum f}$ (b) $l_1 + \left(\frac{f-fo}{2f_1-f_0-f_2}\right) \times h$

(c) $l_1 + \left(\frac{\frac{N}{2}-f}{f}\right) \times h$ (d) इनमें से कोई नहीं

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

बहुलक के मूल्यांकन के लिए प्रश्न

1. निम्न आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करों –

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

2. निम्नलिखित आँकड़ें, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घंटों में) की सूचना देते हैं।

जीवन काल (घंटों में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

बहुलक के लिए (गृह कार्य)

(i) बहुलक के गुण एवं दोष लिखें।
(ii) बहुलक के उपयोग लिखें।
(iii) समान्तरमाध्य, मध्यिका एवं बहुलक में अंतर लिखें।
(iv) निम्नलिखित आकड़ों, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घण्टों) की सूचना देते हैं।

जीवन काल (घंटों में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

गृह कार्य :–

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :–

1. वर्ग 10–20 का परास (Range) क्या है?
2. 3, 4, 2, 3, 3, 2, 3 का बहुलक बताइए।
3. कथन $x = \frac{\sum x}{n}$ सत्य है या असत्य
4. माध्यक = 3 x बहुलक +2x ..... (खाली स्थान भरिए)
5. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।
6. बहुलक वर्ग को परिभाषित कीजिए।
7. 1, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 5 का माध्य ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न अंक 5

1. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रति ात में) द ार्ाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए।

साक्षरता दर (में)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95	-
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3	-

2. नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो और का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	बारंबारता
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
योग	60

स्मरणीय बिंदु सारांश

इस अध्ययन में हमने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है।

(i) $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$

(ii) कल्पित माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum fidi}{\sum fi}$

(iii)बहुलक $= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

(iv) माध्यक $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

(i)

प्रश्न 1:एक कक्षा 9 के विद्यार्थियों की लम्बाई सेंटीमीटर में है :

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148 इन आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 2 : एक कबड्डी की टीम द्वारा अनेक मेचों में प्राप्त किये गये अंक ये हैं:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28 टीम द्वारा प्राप्त किये गये अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 3 :गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने 100 मे से निम्नलिखित अंक प्राप्त किये हैं:

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60 इन आंकड़ों के लिये माध्य माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 4 :निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है, यदि आंकड़ों का माध्यक 63 है, तो x का मान ज्ञात कीजिये।

29, 32, 48, 50, $x, x+2$, 72, 78, 84, 95

प्रश्न 5 : निम्न सारणी से फेक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

वेतन	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10,000
कर्मचारियो की संख्या	16	12	10	8	6	4	3	1

1. निम्न में से कौन केन्द्रीय प्रवृति की माप नहीं है :–

   (a) माध्य (b) बहुलक

   (c) माध्यक (d) मानक विचलन

2. निम्न में से किसे ग्राफीय विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है :–

   (a) माध्य (b) माध्यक

   (c) बहुलक (d) कोई नहीं

3. माध्य, माध्यिका एवं बहुलक के बीच संबंध है :–

   (a) बहुलक = 3 x माध्य - 2 x माध्यक

   (b) बहुलक = 3 x माध्यक - 2 x माध्य

   (c) माध्यक = 3 x माध्य - 2 x बहुलक

   (d) माध्य = 3 x माध्यक - 2 x बहुलक

4. सममित बारंबारता वितरण के लिये सही संबंध है :–

   (a) माध्य < बहुलक < माध्यक (b) माध्य > बहुलक > माध्यक

   (c) माध्य = बहुलक = माध्यक (d) बहुलक = $\frac{1}{2}$ (माध्य + माध्यक)

5. यदि बारंबारता वितरण के लिये माध्य और बहुलक 28 और 16 है तब माध्यक है :–

   (a) 22 (b) 23.5

   (c) 24 (d) 25.8

6. संचयी बारंबारता सारणी किस केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप में उपयोगी है :–

   (a) माध्य (b) माध्यक

   (c) बहुलक (d) सभी

7. माध्यिका :–

(a) $l + \left\{\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right\} \times h$ (b) $l + \left\{\frac{\frac{n}{2} + cf}{f}\right\} \times h$

(c) $l - \left\{\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right\} \times h$ (d) इनमें से कोई नहीं।

8. वर्गीकृत आंकड़ों से सूत्र $l + \left\{\frac{f1-f0}{2f1-fo-f2}\right\}.h$

किस केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप को ज्ञात करने का है:

(a) माध्य (b) माध्यक

(c) बहुलक (d) कोई नहीं

नोट : प्रश्न क्रं. 1 से प्रश्न क्रं. 5 तक प्रत्येक 5 अंक।

प्रश्न 1:नीचे दी हुई सारणी भारत के विभिन्न राज्यों एवं संधीय क्षेत्रों के ग्रामीण क्षेत्रों के प्राथमिक विद्यालयों में महिला शिक्षकों के प्रतिशत बंटन को दर्शाती है। महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत प्रत्यक्ष विधि एवं काल्पित माध्य विधि एवं से ज्ञात कीजिये:

महिला शिक्षकों	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
कर्मचारियों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

प्रश्न 2:निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च को दर्शाता है । माध्य जेब खर्च 18 रू. है तब लुप्त बारंबारता ज्ञात करिए :

दैनिक जेब खर्च 25 (रूपयों में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

प्रश्न 3:निम्नलिखित आंकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलु व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिये सारा ही माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिये :

व्यय रूपयों में	1000–1500	1500–2000	2000–2500	2500–3000	3000–3500	3500–4000	4000–4500	45000–5000
परिवारों की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

प्रश्न 4:दिया हुआ बंटन वि व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाजों द्वारा एक दिवसीय अन्तर्राष्ट्रीय क्रिकेट मेचों में बनाए गए रनों को दर्शाता ळें

बनाए	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 6000	6000 – 7000	7000 – 8000	8000 – 9000	9000 – 10000	10000 – 11000

गए रन								
बल्लेबाज़ों की संख्या	4	18	9	7	6	3	1	1

निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिये :

प्रश्न 5:निम्नलिखित आंकड़ों का माध्यक 525 है। यदि बारंबारताओं का योग 100 है, तो x, और y का मान ज्ञात कीजिये :

वर्ग अन्तराल	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600
बारंबारता	2	5	x	12	17	20

	600-700	700-800	800-900	900-1000
	y	9	7	4

अध्याय–15

प्रायिकता

शिक्षकों के लिए निर्देश :

ब्लूप्रिंट :–

अंक 1 प्रश्नों की संख्या 1 = 1 x 1 = 1

अंक 2 प्रश्नों की संख्या 2 = 2 x 2 = 4

कुल अंक = 5

1. शिक्षक कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के पृष्ठ क्र. 323, 324, एवं 325 ,327, 329 पर दिए गए क्रियाकलाप I,II,III,IV,V के माध्यम से प्रायिकता की अवधारणा समझाएंगे।

2. शिक्षक सिक्के, पांसे , ताश के पत्ते , विभिन्न रंगों की गेंदो Pointing Circle आदि TLM का प्रयोग करते हुए प्रायिकता की अवधारणा में संभावना शब्द ''**संदेह**'' या ''संयोग'' शब्द से परिचित कराने का प्रयास करे।

3. शिक्षक असंभव घटना , निश्चित घटना, अनिश्चित घटना , पूरक घटना, समप्रायिक घटना को उदाहरण के माध्यम से बताऐ।

4. प्रायिकता के न्यूनतम मान और अधिकतम मान से छात्रों को उदाहरण द्वारा अवगत कराऐं।

5. प्रायिकता ज्ञात करने हेतु सूत्र एवं प्रयुक्त विभिन्न पदों को स्पष्ट करें।

6. अभ्यास के माध्यम से यह सुनिश्चित कर ले कि प्रायिकता की अवधारणा स्पष्ट हो गई है या नहीं

उद्देश्य :–

1. प्रायिकता की सहायता से संभवत आदि जैसी अनिश्चितता का संख्यात्मक रूप से मापन किया जा सकता है।

2. प्रायिकता द्वारा तर्क–शास्त्र का विकास किया जा सकता है।

3. प्रायिकता द्वारा दैनिक जीवन से जुड़ी समस्याओं के कितने कारण और कितने समाधान हो सकते है। इन सभी पर विचार करने की शक्ति का विकास होता है।

3. प्रायिकता के माध्यम से दैनिक जीवन से जुड़ी विभिन्न घटनाओं में सही निर्णय लेने की समता का विकास होता है।

प्रस्तावना (Introduction to Probability)

शिक्षण विधि :(Question Method)

शिक्षक :बच्चो आप क्रिकेट मैंच देखते होगें।

सभी छात्र :एक साथ हॉ सर ।

शिक्षक :अच्छा बताओं कौन सी टीम batting करेगी यह कैसे तय होता है।

छात्र :सर मैच एम्पायर दोनों टीमो के कप्तानों को बुलाकर सिक्का उछालते है।

शिक्षक :बिल्कुल ठीक । मोहन तुम बताओं कि सिक्के को ही क्यो उछालते है।

मोहन :सर उसमें दो ही Tail व Head होते है जिससे निर्णय आसानी से हो जाता है।

शिक्षक :शाबास इससे निर्णय जल्दी ही नहीं वरन बिना किसी पक्षपात के निर्णय हो जाता है कि किस टीम को क्या करना है। बच्चो आज हम ऐसी ही अनेक बातों का अध्ययन करेगे देखेगे कि प्रायिकता का उपयोग करके हम अनेक व्यावहारिक समस्याओं के बारे में सही निर्णय ले सकेंगे।

शिक्षण कार्य (Teaching Work)

बच्चो जीवन में हम ऐसी बातो को देखते है या घटनाओं के बारे में जानते है जिनका होना या घटना निश्चित होता है इन्हें हम निश्चित घटनाऍ (Centain events) कहते है।

जैसे :सूर्य का पूर्व से उगना जन्म के बाद मृत्यु आदि कुछ घटनाऍ जिनका होना संभव बिल्कुल भी नहीं है। उन्हे अनिश्चित घटनाऍ (Unentain events) कहते है। जैसे सिक्के के उछालने पर चित व पट दोनों एक साथ आता

पासो को फेकने पर 6 से बड़ी संख्या आना आदि।

छात्र कथन : लेकिन सर कभी कभी सिक्का उछालने पर खड़ा गिरता है । तब.....

शिक्षक : शाबास बच्चों इसे घटना नहीं कहा जाएगा क्योंकि इसमें हमें कोई भी परिणाम

प्राप्त नहीं होता है।

हॉ सर फिर हमें दोबारा सिक्के को उछालना पड़ता है। बिल्कुल ठीक । आप समझ रहे है। .....

छात्रों कुछ घटनाऍ ऐसी होती है जिनके होने या न होने के बारे में कुछ निश्चित नहीं कहा जा सकता है। उन्हें या ऐसी घटनाओं को (Event that can happen but not certain) या अनिश्चित घटनाऍ जो कि घटित हो भी सकती है और नहीं भी जैसे

आज बारिश होगी?

पप्पू पास होगा या नहीं (सभी होगे)

कार को चॉबी लगाने पर स्टार्ट होगी या नही आज हम इसी संभावनाओं जिन्हे

प्रायिकता कहते है समझेगे

बच्चो 1. कुल प्रायिकता 1 से ज्यादा नहीं हो सकती है।

2. प्रायिकता शून्य से कम अतः ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

3. किसी भी घटना के होने या न होने का योग 1 होता है।

परिभाषा (Definition) :किसी घटना के घटित होने या न होने की संभावना के संख्यात्मक मान को ही प्रायिकता कहते है।

P(E) : किसी घटना के घटित होने की संभावना।

P($\bar{E}$) : किसी घटना के घटित न होने की संभावना।

P(E) + P($\bar{E}$) =1

सूत्र Formulas :

$$P(E) = \frac{\text{अनुकुल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$$

$$P(E) = \frac{Number\ of\ favourable\ outcomes}{Total\ Number\ of\ outcomes}$$

अब हम विभिन्न उदाहरणों व घटनाओं से प्रायिकता को और अधिक समझेगे।

एक अंकीय प्रश्न (One Mark Question)

1. जो घटनाएँ घटित नहीं होती है उसकी प्रायिकता क्या होगी।

   उत्तर : शून्य

2. घटित न होने वाली घटनाओं को क्या कहते है।

   उत्तर : असंभव घटनाएँ ।

3. उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है क्या होगी।

   उत्तर : एक

4. क्या किसी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक हो सकती है।

   उत्तर : नही

5. प्रायिकता का सूत्र बताइये।

   उत्तर : सूत्र प्रायिकता $P(E) = \frac{\text{अनुकुल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$

दो अंक वाले प्रश्न

प्र.1. एक थैले में एक लाल गेंद , एक नीली गेंद और एक पीली गेंद है तथा सभी गेंदे एक ही साइज की है। कृतिका बिना थैले के अंदर झॉके , इसमें से एक गेंद निकालनी है इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद (i) पीली होगी।

हलः कृतिका थैले में से बिना झॉके गेंद निकालती है। अतः उसके द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है माना " पीली गेंद निकालना " घटना है , पीली गेंद की संख्या = 1 ,

E के अनूकुल परिणामों की संख्या = 1

(1 लाल + 1 नीली + 1 पीली) गेंद = 3 गेंद

तथा प्रत्येक के सभी संभव परिणामों की संख्या = 3 1 अंक

अतः सूत्र

$$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$$

$$= \frac{1}{3}$$ उत्तर

प्र.2. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है । इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता (i) एक इक्का होगा ।

हलः गड्डी को अच्छी प्रकार से फेंटने से परिणामों का सम्प्रायिक होना सुनिश्चित हो जाता है।

एक गड्डी में 4 इक्के होते है। मान लीजिए E एक इक्का होना है।

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

सभी संभव परिणामों की संख्या = ताश की गड्डी के कुल पत्ते = 52 1 अंक

अतः

$$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$$

$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$ 1 अंक

प्र.3. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है । इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता एक इक्का नहीं होगा ।

हलः

प्रथम विधि :– प्र.क्र. 2 के अनुसार

" E एक इक्का " है की प्रायिकता $= \frac{1}{13}$

अतः पूरक घटना की परिभाषा से

P(E) + P($\bar{E}$) =1 द्वारा

P($\bar{E}$) =1 - P(E) 1 अंक

अर्थात घटना के न होने की प्रायिकता =1 - घटना के होने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{1}{13}$$

$$= \frac{12}{13}$$ उत्तर

द्वितीय विधि :–

गड्डी में कुल पत्तो की संख्या = 52

अर्थात प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

" घटना E एक इक्का का न होना " है।

अर्थात गड्डी के कुल पत्ते $52 - 4$ (इक्के)

$= 48$ पत्ते

अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 48 1 अंक

सूत्र : $P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$

प्रयोग के सभी परिणामों की संख्या

$$= \frac{48}{52}$$

$$= \frac{12}{13}$$ उत्तर 1 अंक

प्र.4. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब है । इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा।

हलः कुल बल्बों की संख्या = 20

अर्थात प्रयोग के सभी संभव परिणामें की संख्या = 20

घटना E बल्ब खराब होना

समूह में खराब बल्ब की संख्या = 4

अर्थात E के अनूकूल परिणामों की संख्या = 4

सूत्र : $P(E) = \frac{\text{अनुकुल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$

प्रयोग के सभी परिणामों की संख्या

$$= \frac{4}{20}$$

$$= \frac{1}{5}$$ उत्तर 1 अंक

प्र.5. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो।

हलः माना 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन होना घटना E है।

तथा P(E) ज्ञात करना है।

किंतु 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता $P(\bar{E}) = 0.992$ दी गई है।

एवं $P(\bar{E}) + P(E) = 1$ ज्ञात है। 1 अंक

तब $0.992 + P(E) = 1$

अतः $P(E) = 1 - 0.992$

$P(E) = .008$ उत्तर 1 अंक

विद्यार्थी कहॉ गलती करते है।

1. प्रश्न को सही तरह से न पढ़ना।
2. सभी संभव परिणामों की गणना करने में त्रुटि करना।
3. अनुकूल परिणामों को समझ न पाना या उसकी गणना न कर पाना।
4. सूत्र का प्रयोग करने में त्रुटि करना।
5. दैनिक जीवन से जुड़ी वस्तुओं की जानकारी का अभाव होने से भी प्रश्नों को समझने में होने वाली भूल करना।

पुनरावृत्ति प्रश्न :

1. दो सिक्कों को उछालने पर कुल संभावनाएँ कितनी होगी। (1)
2. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर दो हेड या दो टेल एक साथ आने की प्रायिकता बताईये। (2)
3. दो सिक्को को एक साथ उछालने पर कम से कम एक हेड आने की प्रायिकता क्या होगी। (2)
4. एक सप्ताह में दो रविवार आने की प्रायिकता क्या होगी । (2)

5. अच्छी तरह पिसे हुए ताश की गड्डी के लाल रंग के पत्ते आने की प्रायिकता बताइये। (2)

गृह कार्य : (Home work) :

1. एक पासे को फेकने पर विषम संख्या आने की प्रायिकता बताईये । (1)
2. अच्छी तरह पिसे हुए ताश की गड्डी के काले रंग का बादशाह (King of spade) आने की प्रायिकता बताईये। (2)
3. एक सिक्के को उछालने पर एक साथ हेड व टेल आने की प्रायिकता बताइये। (2)

व अभ्यास प्रश्न

गृह कार्यः

बच्चों आपने ताश के खेल के बारे में सुना होगा । हा जानते है।

ताश की गड्डी दिखाते हुए

श्यामयट कार्य : ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते है । जिसमें

लाल पान	(Red Colour) (Heart)	= कितने पत्ते?
हुकुम	(Spade)	= कितने पत्ते?
चिडी	(Club)	= कितने पत्ते?
ईट	(Diamond)	= कितने पत्ते?

प्रश्न :

प्र.6. ठीक तरह से पिसे हुए ताशों में से इक्का आने की प्रायिकता बताईये। (2)

प्र.7. ठीक तरह से पिसे हुए ताशों में से लाल का गुलाम (Jack of Heats) के आने की प्रायिकता बताइये। (2)

प्र.8. ठीक तरह से पिसे हुए ताशों में से फेस कार्ड आने की प्रायिकता क्या होगी । (2)

अब हम dice या पांसे के बारे में जानेगे।

पासें में 1 से लेकर 6 तक अंक होते है।

: 1, 2 ,3, 4,5, व 6

सम संख्या : 2, 4, 6 कितनी

विषम संख्या : 1, 3, 5 कितनी

अभाज्य संख्या : 2, 3, 5 कुल 03

1. एक पांसे को उछालने या फैकने पर सम संख्या आने की प्रायिकता बताइये।
2. एक को फेकने पर चार से बड़ा अंक आने की प्रायिकता बताइये।

3. एक पासे को फेकने पर चार से बड़ा अंक आने की प्रायिकता बताईये। (2)

4. एक पासे को फैकने पर अभाज्य संख्या Prime numbers आने की प्रायिकता बताइये। (2)

नोटः दो पासे : कुल 36 संभावनाएँ :

5. दो पांसो (dices) को एक साथ फेकने पर अंकों का योग 8 आये इसकी क्या प्रायिकता होगी ?

6. दो पांसो को एक साथ फैंकने पर समान अंक आने की प्रायिकता बताइये? (2)

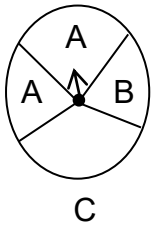
7. कुछ रंग बिरंगी (लाल, नीली,पीली, सफेद) बाल व थैला दिखाते हुए ।

यदि इस थैले में पॉच लाल, चार नीली, तीन पीली व दो सफेद गेंदे रख देता हूँ ।

किसी बच्चे को पास बुलाते हुए : इस थैले में से लाल गेंद आने की प्रायिकता क्या होगी ।

सभी ग्रुप चूकि थैले में पॉच लाल गेंदे है तथा कुल गेदों की संख्या 13 है अतः प्रायिकता 5/13 होगी ।

8. थैले मे से सफेद गेंद आने की निकालने की प्रायिकता क्या होगी। (1)

9. 

चित्र में पाइण्टर की A पर आने की रूकने की प्रायिकता बताईये? (1)

10. पांइटर की B पर रूकने की प्रायिकता क्या होगी ।

स्मरणीय बिंदु :–

1. किसी भी घटना के होने या न होने की संभावना 1 से अधिक व 0 से कम नहीं हो सकती है।
2. किसी भी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक नहीं होती है।
3. प्रायिकता का सूत्र : $P(E) = \frac{\text{अनुकुल परिणामो की संख्या}}{\text{कुल परिणामो की संख्या}}$
4. $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

कार्यपत्रक (Work Sheet) - I

प्रायिकता (PROBABILITY)

प्रश्न1. एक सिक्के को 500 बार उछालने पर , हमें यह प्राप्त होता है। दो चित : 105 बार, एक चित : 275 बार

और कोई भी चित नहीः 120 बार इनमें से प्रत्येक घटना के घटने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

प्रश्न2. एक विद्यार्थी द्वारा मासिक यूनिट परीक्षा में प्राप्त किये गये अंको का प्रतिशत नीचे दिया गया है।,

इन आकंड़ो के आधार पर इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक यूनिट परीक्षा में वह 70 प्रतिशत से अधिक अंक प्राप्त करता है।

यूनिट परीक्षा	I	II	III	IV	V
प्राप्त अंकों का प्रतिशत	69	71	73	68	74

प्रश्न3. बीजो के 50 थैलों में से प्रत्येक थैले से पचास बीज यदृच्छया चुनकर उन्हें ऐसी मानकीकृत अवस्था में रखा गया जो अंकुरण के अनुकूल है। 20 दिन बाद प्रत्येक संग्रह में अंकुरित हुए बीजों की संख्या गिन कर नीचे दर्शाए अनुसार एक सारणी में लिखी गई ।

थैला	1	2	3	4	5
अंकुरित बीजों की संख्या	40	48	42	39	41

निम्न लिखित बीजों के अंकुरण की प्रायिकता क्या है ?

(i) एक थैले में 40 से अधिक बीज ?
(ii) एक थैले में 49 बीज?
(iii) एक थैले में 35 से अधिक बीज?

प्रश्न4: एक क्रिकेट मैच में , एक महिला बल्लेबाज खेली गयी 30 गेंदों में 6 बार चौका मारती है। चौका न मारे जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्रश्न5. 2 बच्चो वाले 1500 परिवारों का यदृच्छया चयन किया गया है। और निम्नलिखित आंकड़े लिख लिये गये है।

परिवार में लड़कियों की संख्या	2	1	0
परिवारों की संख्या	475	814	211

यदृच्छया चुने गए उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । जिसमें

(i) दो लड़कियॉ हो (ii) एक लड़की हो (iii) कोई लड़की न हो।

साथ ही जॉच कीजिये कि इन प्रायिकताओं का योगफल 1 है या नहीं

प्रश्न6. आटे की उन 11 थैलियों में जिन पर 5 किलो अंकित है , वास्तव में आटे के निम्नलिखित भार (kg) है।

4.97, 5.05, 5.08, 5.03, 5.00, 5.06, 5.08, 4.98, 5.04, 5.07, 5.00. यदृच्छया चुनी गयी थैली में 5kg से अधिक आंटा होने की प्रायिकता क्या होगी।

प्रश्न7. एक टायर बनाने वाली एक कम्पनी तय की गयी उन दूरियों का एक रिकार्ड रखती थी, जिसके पहले टायर को बदलने की आवश्यकता पड़ी । सारणी में 1000 स्थितियों के परिणाम दिखाएँ गये है।

दूरी (km) में	4000 से कम	4000 से 9000 तक	90001 से 14000 तक	14000 से अधिक
बारम्बरता	20	210	325	445

यदृच्छया चुने गए उस परिवार की प्रायिकता ज्ञात कीजिए , जिसमें

यदि आप इस कम्पनी से टायर खरीदते है , तो इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि ।

(i) 4000 km की दूरी तय करने से पहले ही इसे बदलना आवश्यक होगा।

(ii) यह 9000 km से भी अधिक दूरी तक चलेगा।

(iii) 4000 km और 14000 km के बीच की दूरी तय करने के बाद इसे बदलना आवश्यक होगा।

प्रश्न8. यह निर्णय लेने के लिये कि कौन सी टीम खेल प्रारंभ करेगी, एक सिक्का उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि आपकी टीम खेल प्रारंभ करेगी।

प्रश्न9. क्रियाकलाप

एक सिक्का लीजिए , उसे दस बार उछालिए और देखिए कि कितनी बार चित आता है और कितनी बार पट आता है। आप अपने प्रेक्षणों को आगे आने वाली सारणी के रूप में लिखिए।

सिक्का उछालने की संख्या	चित आने की संख्या	पट आने की संख्या
10		

निम्न भिन्न का मान ज्ञात करिये।

1. $\frac{\text{चित आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$

2. $\frac{\text{पट आने की संख्या}}{\text{सिक्का उछालने की कुल संख्या}}$

कार्यपत्रक (Work Sheet) - II

प्रायिकता (PROBABILITY)

नोटः ब्लू प्रिंट के अनुसार प्रायिकता से वस्तुनिश्ठ प्रश्न 1 अंक तथा 2 अंक का लघुत्तरीय प्रश्न आवंटित है।

प्रश्न 1. वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. वह घटना जिसका घटित होना निश्चित है उसकी प्रायिकता क्या होगी?
   (a) 0 (b) 1 (c) ½ (d) कोई नहीं

2. वह घटना जिसका घटित होना असम्भव है उसकी प्रायिकता क्या होगी?
   (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 1/2

3. यदि किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता P तब उस घटना के पूरक घटना के घटित होने की प्रायिकता क्या होगी?
   (a) P (b) P-1 (c) 1-P (d) 1-1/P

4. किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता का मान किन्ही दो पूर्णाक संख्याओं के मध्य होता है वह संख्याएँ है?
   (a) -1 से +1 के बीच (b) -1 से 0 के बीच (c) 0 से 1 के बीच (d) 1 से 2 के बीच

5. एक पांसे को एक बार टास किया जाता है , तब अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी, ?
   (a) 0 (b) 1 (c) 1/2 (d) 2/3

6. किसी घटना E के लिये $P(E) + P(\bar{E}) =$?
   (a) 0 (b) 1 (c) 1/2 (d) -1

7. किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग सदैव क्या होता है ?
   (a) 0 (b) -1 (c) 1/2 (d) 1

8. दो सिक्के को एक साथ टास किया जाता है तब ठीक एक हेड आने की प्रायिकता क्या होगी ?
   (a) 1/4 (b) 1/2 (c) 3/4 (d) 2/3

9. एक पांसे को एक बार फेका जाता है तब अंक 4 से अधिक अंक आने की प्रायिकता क्या होगी?

(a) 1/4 (b) 1/6 (c) 1/3 (d) 1/4

10. एक अच्छी तरह से फेटी गयी 52 ताश की गड्डी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाताहै उसके कालें रंग के बादशाह होने की क्या प्रायिकता होगी ?
(a) 1/13 (b) 1/52 (c) 1/26 (d) 2/39

11. एक अच्छी तरह से फेटी गयी 52 ताश की गड्डी में से 1 पत्ता यादृच्छया निकाला जाताहै उसके बेगम होने की क्या प्रायिकता होगी ?
(a) 1/13 (b) 1/26 (c) 4/39 (d) कोई नहीं

12. सामान्य वर्ष में 53 सोमवार होने की क्या प्रायिकता होगी ?
(a) 2/7 (b) 1/7 (c) 7/52 (d) 7/53

13. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है ?
(a) 2/3 (b) -1.5 (c) 15% (d) 0.7

14. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलिया है। मालिनी बिना थैले में झाके उसमें से एक गोली निकालती है इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गयी गोली संतरे की महक वाली है ?
(a) 0 (b) 1 (c) 1/2 (d) कोई नहीं

15. एक पांसे को फेकने पर सम संख्या प्राप्त करने की क्या प्रायिकता होगी ?
(a) 2/3 (b) 1/2 (c) 1/3 (d) 1/4

प्रश्न 2. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे है । इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है इसकी प्रायिकता क्या है कि (1) गेद लाल हो (2) गेंद काली हो?

प्रश्न 3. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गये है। इस मिश्रण में से एक पेने यादृच्छया निकाला जाता है । निकाले गए पेन के अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये?

प्रश्न 4. दो पासों को फेकने पर समान अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये?

प्रश्न 5. दो पासों को फेकने पर अंकों का योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये?

प्रश्न6. दो सिक्को को एक साथ उछालने पर कम से कम एक हेड आने की प्रायिकता क्या होगी ?

प्रश्न7. 20 बल्बों के समूह में 4 बल्ब खराब है । इस समूह में से एक बल्व यादृच्छया निकाला जाता है । इसकी क्या प्रायिकता होगी कि यह बल्व खराब होगा ।

प्रश्न8. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की क्या प्रायिकता होगी?

प्रश्न9. एक जार में 24 कंचे है कुछ हरे है शेष नीले है। यदि इस जार में से 1 कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तब इस कंचे के हरे होने की प्रायिकता 2/3 है तब हरे और नीले कंचो की संख्या ज्ञात करिये?

प्रश्न10. एक बच्चे के पास ऐसा पांसा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित है।

इस पांसे को 1 बार फेका जाता है तब प्रायिकता ज्ञात कीजिये

A	B	C	D	E	A

(i) A प्राप्त हो (ii) D प्राप्त हो

शिक्षकों एवं समग्र शिक्षा अभियान की टीम के प्रयासों द्वारा मण्डल की बोर्ड परीक्षा के लिये कक्षा 10वीं विषय गणित हेतु विद्यार्थियों के लिये परीक्षा उपयोगी समाग्री तैयार करने पर पूरी टीम को लोक शिक्षण संचालनालय द्वारा आभार ज्ञापित किया जाता है।

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन) लोक शिक्षण संचालनालय, (म.प्र.)

हौसले के साथ करें 5 सकारात्मक प्रयास!

आप स्वामी हैं सकारात्मक सोच और बुलंद हौसलों के.
परीक्षा जैसी साधारण प्रक्रिया को
अपने मन–मस्तिष्क में डर का स्वरूप न लेने दें.

परीक्षा का डर निकालें – करें पाँच प्रयास

सोमवार से शनिवार – प्रातः 8 बजे से रात 8 बजे तक

उमंग किशोर हेल्पलाइन टोल फ्री नं. **14425**

निश्चिंत रहिये आपकी पहचान / बात / समस्या या घटना को गोपनीय रखा जाएगा।